SF2715 Applied Combinatorics// Extra exercises and solutions, Part 2

Jakob Jonsson

April 5, 2011

Ö Övningsuppgifter

These extra exercises are mostly in Swedish. If you have trouble understanding please contact the course leader Svante.

Ö.1 Prove Theorem 1.1

Prove Theorem 1.1 in Notes 2 using the interpretation as Dyck paths ending at $(2n-2-t, t)$.

Svårighetsgrad: B

Ö.2 Follow the bijections

For the following string of well matched parenthesis find the corresponding objects using the bijections defined in Notes 2.

$$(\,(\,(\,)\,)\,(\,)\,(\,(\,)\,(\,)\,)\,(\,(\,(\,)\,(\,)\,)\,(\,)\,)\,(\,)\,)$$

Svårighetsgrad: E

Ö.3 Refinement

For each of the four sets of objects A,B,C and E defined in Notes 2 find some subsets counted by $c_n(t)$.

Svårighetsgrad: C-E

Ö.4 Partition med avseende på största gemensamma delare

Låt n vara ett positivt heltal. Man kan bilda en partition av $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ genom att låta a och b tillhöra samma mängd om och endast om $\gcd(a, n) = \gcd(b, n)$, där $\gcd(a, n)$ är lika med den största gemensamma delaren till a och n. Bestäm denna partition för $n = 6$, $n = 11$, $n = 12$ och $n = 16$.

Svårighetsgrad: E

Ö.5 En permutation på en mängd av heltalspar

Låt m och n vara positiva heltal, och låt X vara mängden av par (a, b) sådana att $0 \leq a \leq m-1$ och $0 \leq b \leq n-1$. Låt π vara permutationen på X med egenskapen att

$$\pi((a,b)) = ((a+1) \bmod m, (b+1) \bmod n).$$

Exempel: Om vi skriver paret (a, b) som ab har vi för $m = 3$ och $n = 4$ cykeluppdelningen

$$(00, 11, 22, 03, 10, 21, 02, 13, 20, 01, 12, 23)$$

och för $m = 3$ och $n = 6$ cykeluppdelningen

$$(00, 11, 22, 03, 14, 25)(01, 12, 23, 04, 15, 20)(02, 13, 24, 05, 10, 21).$$

Visa att π är en cyklisk permutation om och endast om $\gcd(m, n) = 1$, där $\gcd(m, n)$ är lika med den största gemensamma delaren till m och n.

Svårighetsgrad: D

Ö.6 Cykeluppdelning vid multiplikation modulo 13

Mängden $\mathbb{Z}_{13}^* = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ bildar en grupp under multiplikation modulo 13. För $j \in \mathbb{Z}_{13}^*$, låt π_j beteckna permutationen som ges av multiplikation med j modulo 13; vi har alltså att $\pi_j(i) = (j \cdot i) \bmod 13$ för $i \in \mathbb{Z}_{13}^*$.

(a) Ange cykeluppdelningen för permutationerna π_3 och π_5.

(b) Ange en sluten formel för elementet i rad r och kolumn k i följande tabell:

		k			
		0	1	2	3
r	0	1	5	12	8
	1	3	2	10	11
	2	9	6	4	7

Svårighetsgrad: (a): E, (b): C

Ö.7 Permutationer med lika stora cykler

Låt n och k vara positiva heltal. Visa att det finns

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot k^n}$$

permutationer av nk element med en cykeluppdelning bestående av n cykler med vardera k element.

Svårighetsgrad: C

Ö.8 Mängdpartitioner med lika stora delar

Låt n och k vara positiva heltal. Visa att det finns

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n}$$

partitioner av en mängd med nk element bestående av n delmängder med vardera k element.

Svårighetsgrad: C (lättare om du gjort uppgift Ö.7)

Ö.9 231-undvikande permutationer

En permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$ är 231-undvikande om det inte finns index $i < j < k$ sådana att $a_k < a_i < a_j$. Förklaringen till denna beteckning är att $a_i a_j a_k$ bildar "mönstret" 231; a_i är näst störst, a_j är störst och a_k är minst. Exempelvis är 3127465 en 231-undvikande permutation, medan 4127365 inte är det, ty $\underline{4}12\underline{73}65$ innehåller delsekvensen 473, som bildar "mönstret" 231.

Visa att antalet 231-undvikande permutationer av n element är lika med det n:te Catalantalet C_n.

Ledning. Försök hitta en rekursion genom att studera positionen för det största elementet n i en given 231-undvikande permutation.

Svårighetsgrad: A

Ö.10 Involutioner

Visa att följande permutationer är involutioner:

- Den permutation π av mängden $\{0, 1, 2, \ldots, 2m - 1\}$ som ges av
$$\pi(k) = (k + m) \bmod 2m.$$
- Den permutation π av mängden $\{0, 1, 2, \ldots, 2m - 1\}$ som ges av
$$\pi(k) = (a - k) \bmod 2m,$$
där a är en heltalskonstant.
- Permutationen π^5, då π är permutationen av mängden $\{1, 2, \ldots, 10\}$ som ges av
$$\pi(k) = (2k) \bmod 11.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.11 Partitioner där hälften av elementen tillhör samma delmängd

Låt $n \geq 1$, och låt H_n vara antalet partitioner av en mängd med $2n$ element sådana att det finns en delmängd i partitionen som innehåller exakt n element. Visa att

$$H_n = \binom{2n}{n} \cdot \left(B_n - \frac{1}{2}\right),$$

där B_n är det n:te Belltalet.

Svårighetsgrad: E

Ö.12 Ordnade partitioner

Belltalet B_n ger som bekant antalet partitioner av mängden $\{1, \ldots, n\}$. Låt P_n vara antalet *ordnade* partitioner av mängden $\{1, \ldots, n\}$, där en ordnad partition är en följd $(Y_1, \ldots, Y_k)$ sådan att $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ är en (oordnad) partition. Exempelvis är $P_3 = 13$, ty vi har 13 ordnade partitioner av tre element:

$$(123), (1, 23), (23, 1), (2, 13), (13, 2), (3, 12), (12, 3),$$
$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Visa att

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i$$

för $n \geq 1$ och att

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^x}.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.13 Dartspel och Belltal

Med n dartpilar, numrerade från 1 till n, och med en tavla med n ringar, numrerade från 1 till n utifrån och in, kan man spela följande spel.

(1) Pilarna kastas i nummerordning.

(2) Man måste träffa tavlan med alla pilar.

(3) Man får inte sätta en pil i en given ring förrän man har satt pilar i alla ringar utanför den givna ringen. I synnerhet måste den första pilen sättas i den yttersta ringen med nummer 1.

Man vinner om man lyckas kasta alla n pilar enligt ovanstående regler. Exempelvis ger följande kastsviter vinst för $n = 3$:

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3).$$

Visa att antalet sätt att vinna på är lika med det n:te Belltalet.

Svårighetsgrad: B

Ö.14 Stirlingtal av första slaget

Absolutbeloppet $c_{n,k}$ av Stirlingtalet $s_{n,k}$ av första slaget anger antalet permutationer av $\{1, \ldots, n\}$ med exakt k cykler. Observera att $c_{n,k} = 0$ om $n < k$.

(a) Visa att

$$c_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r,k-1}$$

genom att i en given permutation studera den cykel som innehåller elementet n.

(b) Låt

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Använd (a) för att visa att

$$f_k'(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x}$$

för $k \geq 1$ (vi definierar $f_0(x) = 1$).

(c) Använd (b) för att visa att

$$f_k(x) = \frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}.$$

Svårighetsgrad: A-C

Ö.15 Stirlingtal av andra slaget

Stirlingtalet $S_{n,k}$ av andra slaget anger antalet partitioner av $\{1, \ldots, n\}$ i exakt k delmängder. Observera att $S_{n,k} = 0$ om $n < k$.

(a) Visa att

$$S_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r,k-1}$$

genom att i en given partition studera den delmängd som innehåller elementet n.

(b) Låt

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Använd (a) för att visa att

$$f_k'(x) = e^x f_{k-1}(x)$$

för $k \geq 1$ (vi definierar $f_0(x) = 1$).

(c) Använd (b) för att visa att

$$f_k(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

Svårighetsgrad: A-C (lättare om du gjort uppgift Ö.14)

Ö.16 Partitioner av n med högst k delar

Låt $k, n \geq 1$. Visa att antalet partitioner av talet n med högst k delar är lika med antalet partitioner av n sådana att varje del är högst k. Exempelvis har vi för $n = 5$ och $k = 3$ att

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

och att

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2,$$

alltså fem partitioner i bägge fallen.

Svårighetsgrad: E

Ö.17 Partitioner av kn med alla delar delbara med k

Låt $n, k \geq 1$. Visa att antalet partitioner av talet kn sådana att varje del är delbar med k är lika med det totala antalet partitioner av talet n.

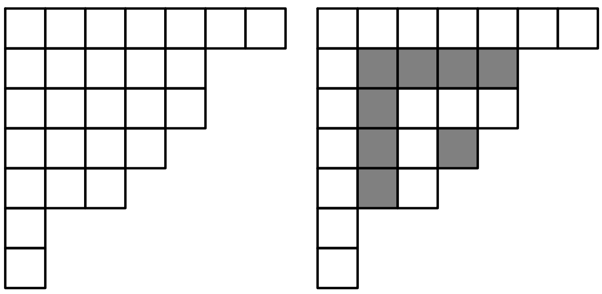
Svårighetsgrad: E

Ö.18 Partitioner av n som är sitt eget konjugat

Ge ett övertygande argument för att antalet partitioner av n som sammanfaller med sitt eget konjugat är lika med antalet partitioner av n i delar som alla är udda och sinsemellan olika.

Ledning. Studera bilden till höger i Figur 1.

Svårighetsgrad: B



Figur 1: Exempel på en partition som är sitt eget konjugat; kolumn i och rad i har samma längd för alla i. Bilden till höger ger en ledtråd till uppgift Ö.18.

Ö.19 Komplettering av tablåer

Visa att var och en av de tre delvis ifyllda tablåerna i Figur 2 kan kompletteras till en fullständig tablå på precis ett sätt. Ange de unika fullständiga tablåerna.

			7
			12
4	10	14	

			5	8			14
4			11				

			5	14
2		7		
11		13		

Figur 2: De tre delvis ifyllda tablåerna i uppgift Ö.19.

Svårighetsgrad: E

Ö.20 RSK-algoritmen I

Använd RSK-algoritmen på permutationerna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Förklara sambandet mellan de två resulterande paren av tablåer.

Svårighetsgrad: E

Ö.21 RSK-algoritmen II

Använd RSK-algoritmen på permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Förklara sambandet mellan de två resulterande tablåerna.

Svårighetsgrad: E

Ö.22 RSK-algoritmen III

Låt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

vara en permutation sådan att

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & \cdots & < & a_{n-1} & < & a_n \\ b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & \cdots & < & b_{n-1} & < & b_n \end{array}$$

och $a_i < b_i$ för $1 \leq i \leq n$. Vad blir resultatet då man använder RSK-algoritmen på denna permutation? Motivera ditt svar med ett bevis.

Ledning om du kör fast: Försök få en idé genom att studera ett specialfall, exempelvis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lägg märke till hur tablåerna ser ut efter k steg för varje givet k.

Svårighetsgrad: C

Lösningsförslag till övningsuppgifter, del II

Obs! Preliminär version!

Ö.4. För varje delare d till n, låt A_d var mängden av element a sådana att $\gcd(a, n) = d$. Partitionen ges av

$$\{A_d : d \text{ delar } n\}.$$

- $n = 6$: $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{3\}$, vilket ger partitionen

  $$\{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}\}.$$

- $n = 11$: Alla element ligger i A_1, vilket ger partitionen

  $$\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}.$$

- $n = 12$: $A_1 = \{1, 5, 7, 11\}$, $A_2 = \{2, 10\}$, $A_3 = \{3, 9\}$, $A_4 = \{4, 8\}$ och $A_6 = \{6\}$, vilket ger partitionen

  $$\{\{1, 5, 7, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{6\}\}.$$

- $n = 16$: $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $A_2 = \{2, 6, 10, 14\}$, $A_4 = \{4, 12\}$ och $A_8 = \{8\}$, vilket ger partitionen

  $$\{\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}, \{2, 6, 10, 14\}, \{4, 12\}, \{8\}\}.$$

Ö.5. Längden på cykeln som innehåller elementet $(0, 0)$ är lika med det största positiva elementet k som har egenskapen att $\pi^k(0, 0) = (0, 0)$. Nu är

$$\pi^k(0, 0) = (k \bmod m, k \bmod n),$$

vilket innebär att $\pi^k(0, 0) = (0, 0)$ om och endast om k är delbart med såväl m som n. Det minsta k som uppfyller detta är

$$k = \operatorname{lcm}(m, n) = \frac{mn}{\gcd(m, n)}.$$

Om $\gcd(m, n) = 1$ är $k = mn$, vilket innebär att π är en cyklisk permutation; antalet element i X är mn. Om $\gcd(m, n) > 1$ är $k < mn$, vilket innebär att π inte är en cyklisk permutation.

Ö.6.

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 2 & 5 & 8 & 11 & 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \\ &= (1,3,9)(2,6,5)(4,12,10)(7,8,11)\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\pi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 10 & 2 & 7 & 12 & 4 & 9 & 1 & 6 & 11 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1,5,12,8)(2,10,11,3)(4,7,9,6).\end{aligned}$$

(b) Vi observerar att vi har cykeluppdelningen för π_5 i raderna och cykeluppdelningen för π_3 i kolumnerna. Vi kan nämligen skriva

$$(1,3,9)(2,6,5)(4,12,10)(7,8,11) = (1,3,9)(5,2,6)(12,10,4)(8,11,7)$$

och

$$(1,5,12,8)(2,10,11,3)(4,7,9,6) = (1,5,12,8)(3,2,10,11)(9,6,4,7).$$

Detta innebär att vi multiplicerar med 5 för varje steg vi tar åt höger och med 3 för varje steg vi tar nedåt. Eftersom elementet i rad 0 och kolumn 0 är lika med 1 får vi att elementet i rad r och kolumn k är lika med

$$(3^r \cdot 5^k) \bmod 13.$$

Ö.7. Vi använder induktion över antalet cykler n. Basfallet i induktionen är $n = 1$.[1] I detta fall ska vi räkna antalet cykliska permutationer på en mängd med k element. Det finns $(k-1)!$ sådana permutationer, och mycket riktigt har vi att

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot k^n} = \frac{k!}{1! \cdot k^1} = (k-1)!.$$

Låt nu $n \geq 2$, och studera cykeln som innehåller det största talet nk. De övriga $k-1$ elementen i cykeln kan väljas på $\binom{nk-1}{k-1}$ olika sätt, och de kan ordnas på $(k-1)!$ olika sätt. Detta ger

$$\frac{(nk-1)!}{(nk-k)!} = \frac{(nk-1)!}{((n-1)k)!}$$

möjliga val för cykeln. Det återstår nu $nk - k = (n-1)k$ element, som ska fördelas över $n-1$ cykler med vardera k element. Induktion över n ger att antalet möjligheter för detta är

$$\frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot k^{n-1}}.$$

Multiplikation ger att det totala antalet möjligheter är

$$\frac{(nk-1)!}{((n-1)k)!} \cdot \frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot k^{n-1}} = \frac{(nk-1)!}{(n-1)! \cdot k^{n-1}} = \frac{nk \cdot (nk-1)!}{nk \cdot (n-1)! \cdot k^{n-1}} = \frac{(nk)!}{n! \cdot k^n}.$$

Ö.8. Vi använder induktion över antalet delmängder n. Basfallet i induktionen är $n = 1$. I detta fall ska vi räkna antalet partitioner av en mängd med k element bestående av en enda mängd. Det finns bara en sådan partition, och mycket riktigt har vi att

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n} = \frac{k!}{1! \cdot (k!)^1} = 1.$$

Låt nu $n \geq 2$, och studera delmängden som innehåller det största talet nk. De övriga $k-1$ elementen i delmängden kan väljas på

$$\binom{nk-1}{k-1} = \frac{(nk-1)!}{((n-1)k)! \cdot (k-1)!}$$

olika sätt. Det återstår nu $nk - k = (n-1)k$ element, som ska fördelas över $n-1$ delmängder med vardera k element. Induktion över n ger att antalet möjligheter för detta är

$$\frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot (k!)^{n-1}}.$$

Multiplikation ger att det totala antalet möjligheter är

$$\begin{aligned} & \frac{(nk-1)!}{((n-1)k)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot (k!)^{n-1}} = \frac{(nk-1)!}{(n-1)! \cdot (k!)^{n-1} \cdot (k-1)!} \\ = \; & \frac{nk \cdot (nk-1)!}{nk \cdot (n-1)! \cdot (k!)^{n-1} \cdot (k-1)!} = \frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n}. \end{aligned}$$

[1] Det är helt i sin ordning att ha $n = 0$ som basfall, såväl här som i uppgift Ö.8.

Ö.9. Låt c_n vara antalet 231-undvikande permutationer av $\{1, \ldots, n\}$; vi sätter $c_0 = 1$. Låt $n \geq 1$. I en given tillåten permutation $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n$, låt $k+1$ vara den position där vi hittar talet n. Vi hävdar att de första k elementen i π måste vara de k minsta talen $1, \ldots, k$. Anta nämligen att något $a \geq k+1$ är på någon av dessa positioner. Då måste något $b \leq k$ vara på någon av de positioner som ligger till höger om n. Detta innebär dock att anb bildar mönstret 231, vilket ger en motsägelse.

Anta nu att var och en av $a_1 a_2 \cdots a_k$ och $a_{k+2} a_{k+3} \cdots a_n$ är 231-undvikande. Då är även hela permutationen π 231-undvikande, ty de första k elementen är alla mindre än de $n-k$ sista. Omvänt gäller att var och en av $a_1 a_2 \ldots a_k$ och $a_{k+2} a_{k+3} \ldots a_n$ är 231-undvikande om π är 231-undvikande.

Nu är antalet 231-undvikande permutationer av $\{1, \ldots, k\}$ lika med c_k, medan antalet 231-undvikande permutationer av $\{k+2, \ldots, n-1\}$ är c_{n-k-1}. Summerar vi över k får vi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1},$$

vilket, tillsammans med startvillkoret $c_0 = 1$, visar att c_n är lika med det n:te Catalantalet.

Ö.10. En permutation π är en involution om och endast om π^2 är identiteten.

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}\pi^2(k) &= \pi((k+m) \bmod 2m) = ((k+m)+m) \bmod 2m \\ &= (k+2m) \bmod 2m = k.\end{aligned}$$

- Vi har att

$$\pi^2(k) = \pi((a-k) \bmod 2m) = (a-(a-k)) \bmod 2m = k \bmod 2m.$$

- Vi har att

$$\pi = (1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6).$$

  π är alltså en cyklisk permutation av längd 10. Detta medför att $\pi^{10} = (\pi^5)^2$ är identiteten, vilket innebär att π^5 är en involution.

Ö.11. Studera en partition av X med egenskapen att en delmängd i partitionen innehåller exakt n element. Vi har två fall:

- Partitionen består av två delmängder av storlek n. Det finns $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ sådana partitioner. Varje delmängd Y till X av storlek n ger nämligen upphov till partitionen $\{Y, X \setminus Y\}$. Det finns $\binom{2n}{n}$ sådana delmängder, men eftersom de två delmängderna Y och $X \setminus Y$ ger upphov till samma partition måste vi dela detta antal med 2.

- Partitionen består av exakt en delmängd av storlek n. Det finns $\binom{2n}{n}$ sätt att välja denna delmängd Y. Antalet partitioner av mängden $X \setminus Y$ i minst två delmängder är $B_n - 1$; vi subtraherar 1 eftersom vi ska räkna bort partitionen $\{X \setminus Y\}$. Multiplikation ger att antalet partitioner av X med givna egenskaper är $\binom{2n}{n}(B_n - 1)$.

Summering ger att det sökta antalet partitioner är

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n}(B_n - 1) = \binom{2n}{n}\left(B_n - \frac{1}{2}\right).$$

Ö.12. Låt $n \geq 1$ och studera den första mängden i partitionen. Om antalet element i mängden är j finns det $\binom{n}{j}$ sätt att välja mängden. De övriga $n-j$ elementen kan partitioneras på P_{n-j} olika sätt. Den första mängden är icketom, vilket innebär att j ligger mellan 1 och n. Vi får alltså att

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} P_{n-j} = [i = n-j] = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i.$$

För att beräkna den genererande funktionen $P(x)$ noterar vi att

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{n\geq 0} P_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 1} P_n \frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} P_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= 1 + \sum_{i\geq 0} \sum_{n\geq i+1} P_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} = 1 + \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 1} P_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \\
&= 1 + \sum_{i\geq 0} P_i \frac{x^i}{i!} \sum_{j\geq 1} \frac{x^j}{j!} = 1 + P(x)(e^x - 1),
\end{aligned}$$

och därmed att $P(x) = 1/(2 - e^x)$.

Ö.13. Först påminner vi om att det n:te Belltalet B_n är lika med antalet partitioner av mängden $\{1, \ldots, n\}$. För en given vinnande kastsvit, låt A_i vara mängden av pilar som hamnar i ring i. Låt k vara maximalt sådant att någon pil hamnar i ring k. Detta innebär att $A_{k+1}, \ldots, A_n$ är tomma, och villkoret (3) ger att $A_1, \ldots, A_k$ alla är icketomma. I synnerhet är $\{A_1, \ldots, A_k\}$ en partition av $\{1, \ldots, n\}$.

Vi vill visa att vi har en bijektion mellan vinnande kastsviter och partitioner av $\{1, \ldots, n\}$. För en given partition vill vi alltså visa att det finns precis en kastsvit som ger denna partition enligt ovanstående procedur. Ordna mängderna i partitionen som $\{A_1, \ldots, A_k\}$ så att

$$\min A_1 < \min A_2 < \cdots < \min A_k.$$

För en given partition ordnar vi alltså mängderna i stigande följd med avseende på varje mängds minsta element. Vi har då att en vinnande kastsvit ger upphov till partitionen $\{A_1, \ldots, A_k\}$ om och endast om A_i är den mängd av pilar som hamnar i ring i för $1 \leq i \leq k$. Villkoret (3) är nämligen ekvivalent med att det minsta elementet i A_i är mindre än det minsta elementet i A_j för alla $i < j$.

Ö.14.

(a) I en given permutation med k cykler, studera den cykel som innehåller elementet n. Om längden på cykeln är r har vi att cykeln är på formen $(x_1, \ldots, x_r)$, där $x_r = n$. Det finns $(n-1)!/(n-r)!$ sätt att välja elementen $x_1 \ldots, x_{r-1}$ och sedan $c_{n-r,k-1}$ sätt att välja de övriga $k-1$ cyklerna; vi har $n-r$ återstående element. Talet r är som minst 1 och som mest $n-(k-1) = n-k+1$, ty om r är större än $n-k+1$ finns det inte plats för ytterligare $k-1$ cykler i permutationen. Vi erhåller därmed att

$$c_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r,k-1}.$$

(b) Vi är intresserade av

$$f_k'(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

alltså derivatan av

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n \geq k} \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r,k-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{r \geq 1} \sum_{n \geq r+k-1} c_{n-r,k-1} \cdot \frac{x^{r-1} \cdot x^{n-r}}{(n-r)!} \\
[m = n-r] \quad &= \sum_{r \geq 1} x^{r-1} \sum_{m \geq k-1} c_{m,k-1} \cdot \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{1-x} \cdot f_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

(c) Vi använder induktion över k för att bevisa påståendet. För $k = 0$ får vi att

$$\frac{(-\ln(1-x))^0}{0!} = 1,$$

vilket är lika med $f_0(x)$. Anta att $k \geq 1$. Induktion ger att

$$f_k'(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(-\ln(1-x))^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Vi har nu att derivatan av $\frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}$ är lika med

$$D(-\ln(1-x)) \cdot \frac{k \cdot (-\ln(1-x))^{k-1}}{k!} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(-\ln(1-x))^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x}.$$

Alltså är

$$f_k(x) = \frac{(-\ln(1-x))^k}{k!} + C$$

för någon konstant C. Eftersom $c_{0,k} = 0$ är konstanttermen i $f_k(x)$ lika med noll, vilket innebär att $C = 0$.

Ö.15.

(a) I en given partition med k delmängder, studera den delmängd som innehåller elementet n. Om storleken på delmängden är r har vi $\binom{n-1}{r-1}$ möjligheter för de övriga $r-1$ elementen i mängden och sedan $S_{n-r,k-1}$ sätt att välja de övriga $k-1$ delmängderna; vi har $n-r$ återstående element. Talet r är som minst 1 och som mest $n-(k-1) = n-k+1$, ty om r är större än $n-k+1$ finns det inte plats för ytterligare $k-1$ delmängder i partitionen. Vi erhåller därmed att

$$S_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r,k-1}$$

(b) Vi är intresserade av

$$f_k'(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

alltså derivatan av

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n \geq k} \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r,k-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{r \geq 1} \sum_{n \geq r+k-1} S_{n-r,k-1} \cdot \frac{x^{r-1} \cdot x^{n-r}}{(r-1)! \cdot (n-r)!} \\
[m = n-r] \quad &= \sum_{r \geq 1} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{m \geq k-1} S_{m,k-1} \cdot \frac{x^m}{m!} = e^x \cdot f_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

(c) Vi använder induktion över k för att bevisa påståendet. För $k = 0$ får vi att

$$\frac{(e^x - 1)^0}{0!} = 1,$$

vilket är lika med $f_0(x)$. Anta att $k \geq 1$. Induktion ger att

$$f_k'(x) = e^x \cdot f_{k-1}(x) = e^x \cdot \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Vi har nu att derivatan av $\frac{(e^x-1)^k}{k!}$ är lika med

$$D(e^x - 1) \cdot \frac{k \cdot (e^x - 1)^{k-1}}{k!} = e^x \cdot \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!} = e^x \cdot f_{k-1}(x).$$

Alltså är

$$f_k(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} + C$$

för någon konstant C. Eftersom $S_{0,k} = 0$ är konstanttermen i $f_k(x)$ lika med noll, vilket innebär att $C = 0$.

Ö.16. Studera diagrammet för en given partition. Antalet kvadrater i kolumn 1 är lika med antalet delar. Antalet kvadrater i rad 1 är lika med den största delen i partitionen. I synnerhet har vi att en partition har högst k delar om och endast om den största delen i partitionens konjugat är högst k. Konjugat ger alltså en bijektion mellan partitioner med högst k delar och partitioner sådana att varje del är högst k.

Ö.17. Vi har en bijektion mellan mängden av partitioner av talet n och mängden av partitioner av talet kn sådana att varje del är delbar med k. Avbilda nämligen partitionen

$$n = x_1 + \cdots + x_r$$

på

$$kn = kx_1 + \cdots + kx_r.$$

Ö.18. Studera en partition som är lika med sitt eget konjugat. Idén i beviset är att dela in partitionen i "hakar" och bilda en följd $(b_1, \ldots, b_m)$ så att b_i är storleken på den i:te haken. För att beskriva proceduren studerar vi Figur 1, där hakarna i diagrammet är markerade med omväxlande vitt och grått. Storleken på hakarna är i tur och ordning 13, 7, 5 och 1, vilket ger följden $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (13, 7, 5, 1)$ och alltså partitionen $26 = 13 + 7 + 5 + 1$, en partition med udda och sinsemellan olika tal. Storleken på en given hake är uppenbarligen udda och minst två mer än haken precis innanför. Detta medför att följden $(b_1, \ldots, b_m)$ alltid består av udda och sinsemellan olika tal. Omvänt kan vi för en sådan följd sätta ihop hakar som i Figur 1 och på så sätt få en partition som är lika med sitt eget konjugat. Detta ger en bijektion mellan de två mängder av objekt som skulle räknas.

Ö.19. Se Figur 3 för de unika tablåerna.

1	5	6	7
2	8	11	12
3	9	13	15
4	10	14	16

1	2	3	5	8	9	10	14
4	6	7	11	12	13	15	16

1	3	4	5	14
2	6	7	15	16
8	9	10		
11	12	13		

Figur 3: De unika fullständiga tablåerna i uppgift Ö.19.

I fallet med den första tablån kan vi resonera stegvis på följande sätt:

(i) Elementet 4 befinner sig i den fjärde raden. Detta innebär att den enda möjligheten för de tre positionerna ovanför 4 i den första kolumnen är elementen 1, 2 och 3.

ii) Eftersom 7 ligger i den fjärde kolumnen finns det bara två möjligheter för de två positionerna till vänster om 7 i den andra och tredje kolumnen, nämligen 5 och 6.

(iii) Eftersom elementet 10 ligger på den fjärde raden måste elementen ovanför 10 på den andra och tredje raden att vara 8 och 9.

(iv) Med elementet 12 i den fjärde kolumnen måste 11 ligga den tredje kolumnen direkt till vänster om 12.

(v) Eftersom 14 ligger i den fjärde raden och den tredje kolumnen finns det bara en möjlighet för de återstående elementen 13, 15 och 16.

Se Figur 4 för illustrationer av de mellanliggande stegen (i)-(iv).

1			7
2			12
3			
4	10	14	

(i)

1	5	6	7
2			12
3			
4	10	14	

(ii)

1	5	6	7
2	8		12
3	9		
4	10	14	

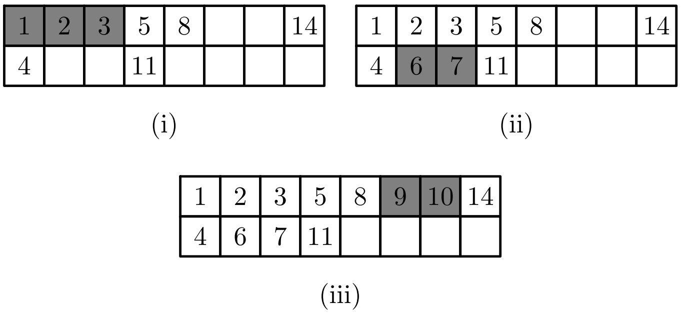
(iii)

1	5	6	7
2	8	11	12
3	9		
4	10	14	

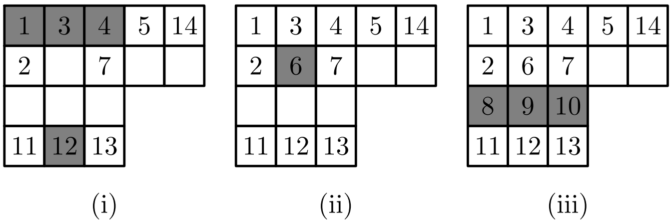
(iv)

Figur 4: Steg (i)-(iv) i lösningen till uppgift Ö.19, första tablån.

På liknande sätt kan vi resonera för de två övriga tablåerna; se Figur 5 och Figur 6 för de mellanliggande stegen.



Figur 5: Mellanliggande steg i lösningen till uppgift Ö.19, andra tablån.



Figur 6: Mellanliggande steg i lösningen till uppgift Ö.19, tredje tablån.

Ö.20. Resultatet för $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \,,\; \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Resultatet för $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \,,\; \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Att vi får samma par av tablåer fast i omvänd ordning beror på att de två permutationerna är varandras inverser.

Ö.21. Resultatet blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \,,\; \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Tablåerna är lika eftersom permutationen är sin egen invers.

Ö.22. Resultatet blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \hline \end{array}\,, \; \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ \hline \end{array} \right).$$

Efter n steg har vi nämligen paret

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \hline \end{array}\,, \; \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline \end{array} \right).$$

Detta följer av att $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

Vi använder induktion över k, $0 \leq k \leq n$, för att visa att vi efter $n + k$ steg av algoritmen har paret

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \cdots & a_k & b_{k+1} & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & \cdots & b_k & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array}\,, \; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \hline n+1 & \cdots & n+k & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array} \right).$$

Observera att $k = n$ ger det slutliga paret av tablåer.

Basfallet $k = 0$ stämmer uppenbarligen. Anta att $k \geq 0$ och studera steg $n+k+1$ av algoritmen. Det aktuella talet som ska in i algoritmen är a_{k+1}. Enligt antagandena har vi att $a_k < a_{k+1} < b_{k+1}$. Detta innebär att a_{k+1} hamnar i kolumn $k+1$ på den position där just nu b_{k+1} befinner sig. Eftersom $b_k < b_{k+1}$ knuffas b_{k+1} ner till positionen längst till höger på den andra raden. Resultatet blir alltså

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & b_{k+2} & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-4} \end{array}\,, \right.$$
$$\left. \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \hline n+1 & \cdots & n+k & n+k+1 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-4} \end{array} \right),$$

vilket avslutar induktionsbeviset.