Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 2, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm $\mathbf{A}^{-1}$ och $\mathbf{B}^{-1}$.

2. Lös de linjära ekvationssystemen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

3. Bestäm en matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Bestäm de reella tal a för vilka nedanstående matris är inverterbar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix}$$

5. Beräkna nedanstående determinanter

$$\begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Bestäm de reella tal a för vilka nedanstående matris är inverterbar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a+3 & a \end{bmatrix}$$

7. Beskriv de taltripplar (x, y, z) sådana att

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Visa att för alla taltripplar (x, y, z) gäller

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x+1 & y-2 & z \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1-x & 4-y & 3-z \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara 3×3-matriser vars determinanter är lika med $\det(\mathbf{A}) = 4$ resp $\det(\mathbf{B}) = -2$. Bestäm

$$\det(3\mathbf{A}), \quad \det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}), \quad \det(2\mathbf{B}^5), \quad \det((\mathbf{B}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}).$$

10. Hitta två 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vars determinanter är lika med $\det(\mathbf{A}) = 4$ resp $\det(\mathbf{B}) = -2$ och sådana att

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}).$$

.

11. Bestäm matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ men $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I}$. Då är $\mathbf{B}$ en högerinvers till $\mathbf{A}$.

12. **Fler övningar finns i läroboken. Se kursPM. Övning ger färdighet.**