

Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 8 den 16 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. Lös i minstakvadratmening ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Bestäm den räta linje $y = kx + m$ som "bäst" ansluter till punkterna $(x, y) = (1, 2.1)$, $(x, y) = (2, 4.9)$ och $(x, y) = (3, 8.1)$.

3. Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara standardbasen B i R^3 och låt en annan bas B' utgöras av vektorerna $\bar{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (1, 2, 3)$ och $\bar{f}_3 = (1, 2, 2)$.

- (a) Bestäm transitionsmatrisen ${}_B\mathbf{T}_{B'}$ som beskriver sambandet mellan koordinaterna $\bar{u} = (x'_1, x'_2, x'_3)$ för vektorn \bar{u} i basen B' , och koordinaterna $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$ för samma vektor \bar{u} i basen B genom

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {}_B\mathbf{T}_{B'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

- (b) Bestäm transitionsmatrisen ${}_{B'}\mathbf{T}_B$.

- (c) Bestäm koordinaterna i basen B' för 3-tippen $\bar{u} = (1, 2, 3)$.

4. Låt B' vara som i uppgift 3 och låt B'' beteckna basen $\bar{g}_1 = (0, 1, 1)$, $\bar{g}_2 = (1, 1, 0)$ och $\bar{g}_3 = (1, 0, 1)$ för R^3 . Bestäm transitionsmatriserna ${}_{B'}\mathbf{T}_{B''}$ och ${}_{B''}\mathbf{T}_{B'}$.

5. Låt B' och B'' vara två olika baser för R^3 . Antag att \bar{u} har koordinaterna $(1, 0, 1)$ i basen B' och koordinaterna $(2, -1, 0)$ i basen B'' , och att \bar{v} har koordinaterna $(2, 1, -1)$ i basen B' och koordinaterna $(0, -1, 1)$ i basen B'' , och att \bar{w} har koordinaterna $(0, 0, 1)$ i basen B' och koordinaterna $(1, -1, 1)$ i basen B'' . Vektorn \bar{x} har koordinaterna $(1, 2, 3)$ i basen B' . Bestäm koordinaterna för \bar{x} i basen B'' .

6. Bestäm samtliga värden på de reella talen a, b, c och d sådana att matrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & a & b \\ \sqrt{8}/3 & c & d \end{pmatrix}$$

blir en ortogonalmatrix.

7. Undersök om det finns reella tal a, b, c, d, e, f, g och h sådana att matrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 2 \\ f & g & h \end{pmatrix}$$

blir en ortogonalmatrix.

8. Visa att om \mathbf{Q} och \mathbf{R} är ortogonalmatriser så är även \mathbf{QR} och $\mathbf{Q}^T\mathbf{R}^{-3}$ ortogonalmatriser.

9. (ON-system) Låt \mathbf{Q} vara en av de ortogonalmatriser du fann i uppgift nummer 6. Låt $\bar{u} = (1 \ 1 \ 1)$ och $\bar{v} = (0 \ 1 \ 1)$. Bestäm längden av vektorerna $\bar{u}\mathbf{Q}$ och $\bar{v}\mathbf{Q}$ och vinkeln mellan dessa vektorer.

10. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $x = 1, y = 1/2.$

2. $y = 3x - 2.9/3$

3. (a) Matrisen

$${}_B \mathbf{T}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$${}_{B'} \mathbf{T}_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) $(0, 1, 0)$

4.

$${}_{B'} \mathbf{T}_{B''} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. $(2, -7, 10)$

6. $(a, b, c, d) = \pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18}).$

7. Finns ej

8. -

9. Längderna $\sqrt{3}$ resp $\sqrt{2}$, vinkeln är $\arccos(\frac{2}{\sqrt{6}})$