Institutionen för matematik, KTH. **Tentamen 21 augusti 2014.**

SF1603, FlerVariabelAnalys för F1 & CL-MAFY2.

Inga hjälpmedel tillåtna. Svar och beräkningar skall motiveras. Alla resonemang måste gå att följa. Alla införda beteckningar skall förklaras. Tentamensskrivningen består av två delar: del I omfattar 10 uppgifter à 4 poäng var; del II omfattar 6 (eller 7) uppgifter à 6 poäng var. En godkänd KS1 ersätter tentamensuppgift 1. En godkänd KS2 ersätter tentamensuppgift 2. Varje godkänd inlupp ger en bonuspoäng vid tentamen. För godkänt (= betyg E) krävs 26 poäng (på del I-II), inklusive bonus. Betyg D erhålles vid uppnådda 31 poäng (på del I-II), inklusive bonus. För betyg C, B, A måste man vara godkänd och ha uppnått ett visst antal poäng på del II. Om man på tentamen har uppnått 24 poäng (inklusive bonus), med sex eller fler uppgifter som är *väsentligen rätt*, ges betyg Fx, med möjlighet till muntlig (eller skriftlig) komplettering av tentamen. Endast betyg E kan då erhållas.

För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K och U, där 3 motsvarar E, K motsvarar Fx och U (underkänd) motsvarar F.

Kurshemsida: http://www.math.kth.se/math/GRU/2013.2014/SF1603/CTFYS/

Del I. Tio uppgifter à 4 poäng.

1. Genom punkten $(2,\,-3,0)$ passerar en nivåyta för funktionen $G(x,y,z) \,=\, \arctan\left(\,3x+2y-4z+3\right)$ och en nivåyta för funktionen $H(x,y,z) \,=\, \sin\left(3y-x+11\right) \,-\, \cos\left(z+5y+15\right)$. Bestäm ekvationen för en rät linje L som går genom den givna punkten och dessutom tangerar de båda ovan nämnda nivåytorna.

2. Avgör huruvida funktionen $w \,=\, f(x,y,t) \,=\, \dfrac{1}{t}\exp\left(\,-\,\dfrac{x^2+y^2}{t}\right)\,,\ t \,>\, 0\,,$ uppfyller någon differentialekvation av typen $w''_{xx} \,+\, w''_{yy} \,=\, C\,w'_t\,,$ och bestäm i så fall konstanten C. Här är $\exp z \,=\, \mathrm{e}^{\,z}$.

3. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{0}\left(\,\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\,-\,y^2\,\right)dy\right)dx$, där $\exp z \,=\, \mathrm{e}^{\,z}$.

4. Antag att funktionen f uppfyller differentialekvationen $y\,f'_x \,=\, x\,f'_y$. Visa att kurvan $5x^2 \,=\, 7 \,-\, 5y^2$ är en nivåkurva till f.

5. En bil rör sig med konstant fart längs en kurva i form av en stor halvcirkel. Då den kört igenom hela kurvan fortsätter bilen rakt fram med precis den hastighet den hade då den kommit ur kurvan. Beräkna den acceleration bilen utsätts för både i kurvan och efter kurvan samt avgör speciellt huruvida accelerationen blir en kontinuerlig funktion av tiden.

6. En partikel rör sig i området $x \,>\, -2$ och $y \,>\, -2$ längs en bana som ges av att $2\left(\,x+y+1\,\right) \,+\, xy \,=\, 0$. Bestäm partikelns största och minsta avstånd från origo.

7. Beräkna medelvärdet av funktionen $y^2 \,-\, x^2$ över området

$$\Omega \;:\; x^2+y^2+1 < 2x+4y\,.$$

8. Då man skall lösa Maxwells ekvationer nödgas man beräkna rotationen av rotationen av ett vektorfält. Det visar sig att detta nya vektorfält kan uttryckas med hjälp av två andra operatorer. Låt här Δ betyda Laplaceoperatorn, definierad av att

$\Delta\,w \,=\, w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}$.

Den kan operera på varje komponent av ett vektorfält $\mathbf{F} \,=\, (f,g,h)$ genom att

$\Delta\,\mathbf{F} \,=\, \left(\,\Delta\,f, \Delta\,g, \Delta\,h\right)$. Visa att

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} \,=\, a\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} \,+\, b\,\Delta\,\mathbf{F}$ för några konstanter a och b, samt ange dessa.

9. *Inledning* (som Du kan hoppa över). Det finns endast tre sorts rörelse i rummet som hela tiden följer samma lokala styrlag helt oberoende av det omgivande rummet eller rymden. Den enklaste är rätlinjig rörelse med konstant hastighet. Det näst enklaste är plan cirkelrörelse med konstant fart. Den allmännaste är en direkt kombination av dessa enkla rörelsemönster: Att röra sig längs en spiral med konstant fart.
Uppgiften. En liten fluga antages röra sig längs en spiral, så att z-koordinaten växer linjärt med tiden, medan flugans projektion (skugga) ner(e) på xy-planet beskriver en likformig cirkelrörelse runt origo i xy-planet. Beskriv spiralrörelsen med koordinater och beräkna hur långt flugan rör sig i rummet under den tid då dess skugga rör sig ett helt varv i xy-planet.

10. Ett slags rund och konstig "tärning" $\mathcal{T}$ beskrivs av att alla punkter i kroppen $\mathcal{T}$
- **både** ligger på ett avstånd från x-axeln som är högst ett
- **samtidigt som** deras avstånd till y-axeln också begränsas av talet 1.

Beskriv kroppen $\mathcal{T}$ med koordinater samt beräkna dess volym. **Tips:** Då man skall utvärdera en multipelintegral kan integrationsordningen vara *helt* avgörande.

Del II. Sex uppgifter à 6 poäng.

11. Enhetsklotet ryms precis in i en origocentrerad kub med volym åtta. Om man nu vill tvinga in detta klot i en mindre kubisk låda, så kan man skära av sex olika kalotter, var och en centrerad kring en koordinataxel. Vi tänker oss nu att vi skall beskära klotet på detta sätt så att de sex avskurna kalotterna touchar varandra i tolv punkter — rita gärna figur. Beräkna arean av den del av sfären (= klotets yta), som blir kvar efter alla kalotter.

12. Lös differentialekvationen $w''_{xx} - w''_{yy} = 0$ fullständigt genom att införa nya variabler av typ $x \pm y$.

13. Försök att hitta en enkel sluten kurva γ, som omsluter ett område Ω i planet med positiv area, sådan att integralen $\int_\gamma x^3\,y\,dx + x\,y^5\,dy$ blir noll.

14. En sluten cirkelskiva med radie R ligger i yz-planet med centrum på y-axeln på avståndet a från origo. Här är $a > R$, så att hela cirkelskivan ligger på ett positivt avstånd från origo. Cirkelskivan roteras nu ett helt varv runt z-axeln i det tredimensionella xyz-rummet, så att en solid torus bildas. Den ser ut som en (söt) munk med ett runt hål i mitten. Beräkna volymen av denna kropp genom att utvärdera en volymsintegral.

15. Antag $R > 0$ och låt γ vara en enkel, sluten kurva i planet. Bestäm det maximala värdet som integralen $I(\gamma)$ kan antaga, då kurvan γ tillåts variera, där
$$I(\gamma) = \int_\gamma \{\, x^3 + y^3 + R^2\,(x - y)\,\}\,dx + \{\, y^4 - x^3 - y^3 + 2R^2\,(x + y)\,\}\,dy\,.$$

16. Denna uppgift handlar ENBART om sådana kritiska punkter för funktioner f av två variabler, vilkas karaktär HELT OCH HÅLLET avgörs av deras (lokala) Taylorpolynom av grad 2 i den kritiska punkten. Rita gärna figurer.

a) Förklara varför de nivåkurvor till f, som ligger *alldeles i närheten* av en lokal maximipunkt (eller minimipunkt) i stort sett ser ut som små ellipser.

b) Förklara varför nivåkurvorna till f *alldeles i närheten* av en sadelpunkt i stort sett ser ut som hyperbelgrenar.

c) Hur ser nivåkurvan $f(x,y) = 0$ ut *på mikroskopisk skala alldeles nära* origo om $f(x,y) = (\cos x\sqrt{3})\,(\cosh y) - 1$? Här är $\cosh y = (\mathrm{e}^{\,y} + \mathrm{e}^{-\,y})/2$.

Lycka till!

Korta, preliminära svar (utförligare lösningar kommer senare; anmäl ev. feltryck):

1. I punkten är grad $G = (3, 2, -4)/10$ och grad $H = (-1, 3, 0)$. Deras kryssprodukt ger en riktningskoefficient $\mathbf{V}$ för den sökta linjen, $\mathbf{V} = (12, 4, 11)/10$.

2. Svar ja med $C = 4$.

3. Ombytt integrationsordning gör att vi kan evaluera denna generaliserade integral till $1/2$.

4. Jfr motsvarande uppgift i maj 2014.

5. Genom hela kurvan har accelerationsvektorn $\mathbf{a}$ konstant längd $a > 0$ och är hela tiden riktad mot cirkelbågens centrum. Längs den efterföljande raksträckan är accelerationen (identiskt) lika med nollvektorn. Speciellt blir accelerationen som en funktion av tiden *diskontinuerlig* vid just den tidpunkten då fordonet *lämnar* kurvan.

6. Partikeln rör sig längs en hyperbolisk bana med origo i ena brännpunkten, som om partiklen vore en ensam planet med solen i origo. Minsta avståndet till origo (solen) blir $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,828$. (De nya variablerna $u = x + 2$, $v = y + 2$ underlättar kalkylen.) Det största avståndet är oändligheten. (Eller: Det finns inget största avstånd, ty avståndet kan bli hur stort som helst.)

7. Området är en cirkelskiva med radie 2 och centrum i punkten $(1, 2)$. Nya koordinater $u = x - 1$, $v = y - 2$ transformerar funktionen $y^2 - x^2$ till $g(u, v) = (v + 2)^2 - (u + 1)^2 = v^2 - u^2 + 4v - 2u + 3$ och området till $D : u^2 + v^2 < 4$. Över D har u^2 och v^2 *samma* medelvärde (mv), medan de två linjära funktionerna $4v$ och $2u$ båda har mv noll. Kvar blir den konstanta funktionen 3, vars mv också är 3.

8. Man finner $a = 1$, $b = -1$.

9. En beskrivning ges av $x = x(t) = R \cos \omega t$, $y = y(t) = R \sin \omega t$, $z = z(t) = bt$. Med $T = 2\pi/\omega$, så att $T\omega = 2\pi$ blir kurvlängden $L = \sqrt{(2\pi R)^2 + (bT)^2}$ eller $L^2 = p^2 + h^2$, där $p =$ omkretsen $2\pi R$ och höjden $h = bT$.

10. Volym $= 16/3$.

11. Varje kalott får area $|K| = \pi\,(2 - \sqrt{2}) \approx \pi \cdot 0,586$. Kvar av sfärens area blir $A = 4\pi - 6|K| = \cdots \approx \pi/2 > 0$.

12. Den endimensionella vågekvationen. Med $u = x - y$, $v = x + y$ fås $w = G(u) + H(v)$, där G och H är (relativt) godtyckliga envariabelfunktioner.

13. Om man ritar en enkel kurva i första kvadranten från en punkt $(a, 0)$ på positiva x-axeln till en punkt $(0, b)$ på positiva y-axeln (t ex en rakt linjesegment eller en kvartcirkelbåge i fallet $a = b > 0$), och sedan *speglar* denna kurva i *både* x- och y-axeln, så får man en sluten, enkel kurva γ kring origo (t ex en rhomboid i det första fallet eller en hel cirkel i det andra fallet). Den är tillräckligt *symmetrisk* kring origo, för att den givna integralens båda termer var och en för sig blir noll.

14. Volymen blir $V = 2\pi a \cdot \pi R^2$, vilket stämmer med en sats av Pappos (som idag råkar heta Guldins regel efter sin återupptäckare). (Värdet skulle dock i denna uppgift beräknas som en trippelintegral; här blir det enklast med cylindriska koordinater.)

15. Greens sats ger $I(\gamma) = \int_D 3\,(R^2 - x^2 - y^2)\,dxdy$, där D är området innanför kurvan γ. Integralen blir maximal om vi låter D vara cirkelskivan kring origo med radie R. Med polära koordinater beräknas då I till $R^4 \cdot 3\pi/2$.

16 a) och **b).** Skärskåda Taylorpolynomet av ordning 2.
c). Nästan som de räta linjerna $y = \pm x\sqrt{3}$, med lutning ± 60 grader.