

Matematiska Institutionen
KTH

Kontrollskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 11 november 2015 kl 15:15-17:00.

Jourhavande lärare: Pär Kurlberg

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Uppgifter

1. (3p) Definiera en linjär avbildning $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ genom

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för $\ker(T)$, och beskriv $\text{range}(T)$.

Lösning: Skriv $p(x) = (x-1)(x-2)q(x) + r(x)$ där $r(x)$ har $\text{grad} \leq 1$. Vi ser då att $p \in \ker(T)$ om och endast om $r(x) = 0$ och således är $\ker(T) = \{(x-1)(x-2)(a+bx) : a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Span}((x-1)(x-2), (x-1)(x-2)x)$. Eftersom $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-2)x$ har olika gradtal är de oberoende och bildar därför en bas.

För att finna $\text{range}(T)$ noterar vi att $T(a(x-1) + b(x-2)) = (b, a)^t$, och således är $\text{range}(T) = \mathbb{R}^2$.

2. (3p) Ekvationen $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ har en rot med real- och imaginärdel lika. Lös ekvationen.

Lösning: Om vi låter $z = t(1+i)$ och sätter imaginärdelen av $p(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4$ till noll får vi att $2t(t+1)^2 = 2$. Bara $t = -1$ ger en rot, och vi ser att $p(z)$ har rötterna $-1 \pm i$ och vi ser att $p(z)$ är delbart med $z^2 + 2z + 2$. Polynomdivision ger att $p(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - z + 2)$, och vi ser att även $z = 1/2 \pm \sqrt{-7}/2$ är rötter.

3. (3p) Låt V och W vara ändligtdimensionella vektorrum. Låt H vara ett nollskilt delrum till V , och låt $T : V \rightarrow W$ vara en injektiv linjär avbildning. Visa att $\dim(T(H)) = \dim(H)$.

Lösning: Låt $b_1, \dots, b_k$ vara en bas för H (notera att H har ändlig dimension eftersom $H \subset V$ och $\dim(V) < \infty$.) Då spänner $T(b_1), \dots, T(b_k)$ upp $T(H)$, och det räcker alltså att visa att vektorerna är oberoende. Men, $\sum_i \alpha_i T(b_i) = 0$, ger att $T(\sum_i \alpha_i b_i) = 0$, dvs $\sum_i \alpha_i b_i \in \ker(T)$. Eftersom $\ker(T) = \{0\}$ och $b_1, \dots, b_k$ är oberoende måste då $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, och vi ser att $T(b_1), \dots, T(b_k)$ är oberoende. Således bildar de en bas, och vi får att $\dim(T(H)) = k = \dim(H)$.