

KTH Matematik,  
Karim och Olle.

**Tentamen i SF1625 Envariabelanalys för E, IT och ME,  
08-06-04, kl. 8.00-13.00.**

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning  $i$  (där  $i = 1, 2, 3, 4$ ) får automatiskt full poäng på tal  $i$ .
- Betygsgränser: 25-28 poäng ger betyget A, 23-25 poäng ger betyget B, 20-22 poäng ger betyget C, 17-19 p ger betyget D och 14-16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Karim eller Olle i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K (eller U) med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.

1. För vilka (reella) tal  $a$  har ekvationen

$$4^x + 2^{x+1} = a$$

någon (reell) lösning? Bestäm (de reella) lösningarna för dessa  $a$ . *Ledning:*  
Sätt till exempel  $t = 2^x$ . (3p)

2. Låt  $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x+1)}$ .

- (a) Bestäm alla  $x$  för vilka  $f(x)$  är definierad (som en reell funktion). (2p)
- (b) Bestäm tangentlinjen till kurvan  $y = f(x)$  genom punkten  $(0, 1)$  på denna kurva. (1p)

3. Beräkna integralen

$$\int \frac{x}{(1-x)^3} dx. \quad (3p)$$

4. Beräkna de fem första från noll skilda termerna i MacLaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right). \quad (3p)$$

5. Beräkna följande gränsvärden och MOTIVERA dina svar (till exempel genom att utnyttja kända standardgränsvärden).

(a) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (1\text{p})$$

(b) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (1\text{p})$$

(c) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}. \quad (1\text{p})$$

(d) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\ln(x+1) - \ln x). \quad (1\text{p})$$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = x, \\ y(0) = 2, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (4\text{p})$$

7. Beräkna först arean  $A(b)$  av det område i  $xy$ -planet som begränsas av  $x$ -axeln, de vertikala linjerna  $x = 0$ ,  $x = b$  (där  $b > 0$ ) och kurvan  $y = x \cdot (x^2 + 2)^{-3/2}$ . Visa sedan att  $\lim_{b \rightarrow \infty} A(b)$  existerar samt beräkna detta gränsvärde. (4p)

8. Funktionen  $f(x)$  uppfyller

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{då } x \neq -1, -2, \\ f(1) = 2. \end{cases}$$

(a) Beräkna Taylorutvecklingen av  $f(x)$  omkring punkten  $x = 1$  till och med ordningen 2. (2p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - x - 5}{(x-1)^2}. \quad (2\text{p})$$

**Lycka till!**  
**Karim och Olle.**