KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till Tentamen 2011-03-16

1. **Skissera kurvan $y = \dfrac{e^{-x}}{2x-1}$ med hjälp av ett teckenstudium av derivatan. Bestäm alla lokala extrempunkter och asymptoter.**

Definitionsmängden består av alla $x \neq 1/2$. Vi ser att $x = 1/2$ är lodrät asymptot (eftersom $\lim_{x \to (1/2)^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \to (1/2)^-} f(x) = -\infty$) och vi ser också att $y = 0$ är vågrät asymptot i oändligheten (eftersom $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$). Vi deriverar och får (efter förenkling)

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}(2x+1)}{(2x-1)^2}$$

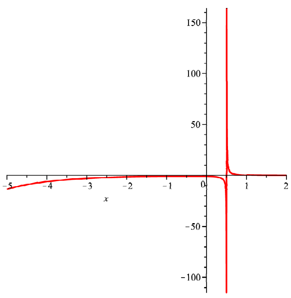
som existerar för alla $x \neq 1/2$. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = -1/2$. Vi teckenstuderar derivatan:

Om $x < -1/2$ så är $f'(x) > 0$ och det följer att f är strängt växande på intervallet $x < -1/2$.

Om $-1/2 < x < 1/2$ så är $f'(x) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande på intervallet $-1/2 < x < 1/2$.

Om $x > 1/2$ så är $f'(x) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande på intervallet $x > 1/2$.

Det följer av ovanstående att f har en enda lokal extrempunkt, nämligen ett lokalt max i $x = -1/2$. Då $f(-1/2) = -\sqrt{e}/2$ kan vi nu skissa kurvan:



2. **Betrakta integralen** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 x \sin x \, dx$**.**

A. Använd substitutionen $u = \cos x$ **för att skriva om integralen.**
B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.

A: Med $u = \cos x$ som är injektiv på $\pi/4 \le x \le \pi/3$ är $du = -\sin x \, dx$, $x = \pi/4 \Leftrightarrow u = 1/\sqrt{2}$ och $x = \pi/3 \Leftrightarrow u = 1/2$, och integralen övergår i

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} (-u^3) \, du = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} u^3 \, du.$$

B: Vi har med hjälp av substitutionen i A att

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 x \sin x \, dx = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} u^3 \, du = ... = \frac{3}{64}.$$

Svar: A.$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} u^3 \, du$ B. 3/64

3. **Beräkna volymen av den rotationskropp som fås då området som begränsas av kurvan** $y = \sqrt{x}e^{-x}$**, linjen** $x = 2$ **och** x**-axeln roterar kring** x**-axeln.**

Volymen ges av $\int_0^2 \pi(\sqrt{x}e^{-x})^2 \, dx$ och vi får med hjälp av partiell integration att detta blir:

$$\pi \int_0^2 xe^{-2x} \, dx = \pi[-(xe^{-2x})/2]_0^2 - \pi \int_0^2 -e^{-2x} \, dx = ... = \pi\frac{1-5e^{-4}}{4}.$$

Svar: $= \pi\frac{1-5e^{-4}}{4}$.

4. **Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad** 2 **till funktionen** $f(x) = \frac{x}{3-x}$**.**

Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{3}{(3-x)^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{6}{(3-x)^3}$$

varur fås att $f(0) = 0$, $f'(0) = 1/3$ och $f''(0) = 2/9$. Det sökta Maclaurinpolynomet är därför

$$p(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}.$$

Svar: Det sökta polynomet är $p(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}$.

5. **Betrakta differentialekvationen $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2t$.**
A. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
B. Bestäm den lösning som också uppfyller $y(0) = 3$ och $y'(0) = 4$.

A. Lösningen är på formen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen och y_p är någon partikulärlösning. Vi söker alltså först y_h, allmän lösning till $y'' - 3y' + 2y = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har lösning $r = 2$ eller $r = 1$ vilket ger att $y_h(t) = Ce^{2t} + De^t$. Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(t) = at + b$. Då är $y_p' = a$ och $y_p'' = 0$ och $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2t \iff a = 1$ och $b = 3/2$. Vi får alltså en partikulärlösning $y_p(t) = at + 3/2$. Den i uppgiften givna differentialekvationen har alltså allmän lösning $y(t) = Ce^{2t} + De^t + t + 3/2$, där C och D är godtyckliga konstanter.

B. Villkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 4$ ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} C + D = \frac{3}{2} \\ 2C + D = 3 \end{cases}$$

med lösning $C = 3/2$ och $D = 0$. Den lösning som uppfyller villkoren är alltså

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{2t} + t + \frac{3}{2}.$$

Svar: A. $y(t) = Ce^{2t} + De^t + t + 3/2$ där C och D är godtyckliga konstanter. B. $y(t) = \frac{3}{2}e^{2t} + t + \frac{3}{2}$.

6. **En 10 meter hög cylindrisk silo med radie 2 meter är fullpackad. Man antar att materialet som fyller silon har en densitet ρ som varierar med höjden så att densiteten på höjden x över bottenplattan ges av formeln $\rho(x) = 100 - x^2$ kilogram per kubikmeter. Hur mycket väger materialet i silon?**

Dela in höjdintervallet i n stycken små delintervall med delningspunkter $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = 10$. Massan av den del av cylinderinnehållet som ligger mellan x_{j-1} och x_j är då ungefär $(100 - x_j^2) \cdot 2^2\pi\Delta x_j$ kg där $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ och hela massan är då ungefär

$$\sum_{j=1}^{n}(100 - x_j^2) \cdot 2^2\pi\Delta x_j$$

som är en Riemannsumma. Vid obegränsat förfinad indelning får vi (då funktionen är kontinuerlig) konvergens mot

$$\int_0^{10} 4\pi(100 - x^2)\, dx = \ldots = \frac{8000\pi}{3} \text{ kg.}$$

7. **A. Förklara i vilken mening** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ **är en generaliserad integral och avgör om den är konvergent eller divergent.**

B. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ **är konvergent eller divergent.**

A. Integralen är generaliserad då integrationsintervallet är obegränsat. Eftersom $0 < 1/(x^2 + \sqrt{x}) < 1/x^2$ och $\int_1^{\infty} dx/x^2$ är konvergent (denna integral har värdet 1) så följer att $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ är konvergent.

B. Låt $f(x) = 1/(x^2+\sqrt{x})$. Då är f positiv, kontinuerlig och avtagande på intervallet $x \geq 1$ och enligt Cauchys integralkriterium gäller då att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ är konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ är konvergent. Eftersom integralen är konvergent enligt uppgift A så följer av detta att också serien är konvergent.

SVar: A Pga obegränsat integrationsintervall, konvergent. B Konvergent.

8. **Bestäm** $a \in \mathbf{R}$ **så att funktionen**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^3 - 8)\sin(x - 2)}{(x - 2)^2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Är f **sedan deriverbar i alla punkter** $x \in \mathbf{R}$**?**

Vi har att f är kontinuerlig i $x = 2$ precis när $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Eftersom $f(2) = a$ och

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)\sin(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)\sin(x-2)}{(x-2)} = 12$$

så ser vi att f är kontinuerlig i punkten $x = 2$ precis när $a = 12$. Om vi sätter $a = 12$ så är alltså f kontinuerlig i $x = 2$ och för alla $x \neq 2$ så är

$$f(x) = \frac{(x^3-8)\sin(x-2)}{(x-2)^2}$$

som är ett elementärt uttryck definierat för alla $x \neq 2$. Alltså är f nu kontinuerlig för alla x. Är f deriverbar? I $x \neq 2$ är det klart att funktionen är deriverbar med hjälp av kvot-, produkt- och kedjereglerna för derivator av elementära funktioner. Punkten $x = 2$ måste dock undersökas separat eftersom nämnaren där är noll. Vi får:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{(x^2+2x+4)\sin(x-2)}{x-2} - 12}{x-2} = \frac{(x^2+2x+4)\sin(x-2) - 12(x-2)}{(x-2)^2} = \cdots = 6,$$

där vi har använt l'Hospitals regel två gånger. Vi ser alltså att f nu är deriverbar överallt.

Svar: 12. Ja.

9. **A. Bestäm det största intervallet $(0, d)$, med $d > 0$, där funktionen $f(x) = x^4 - 4x^2$ har invers. Bestäm också intervallet där inversen f^{-1} är definierad.**
B. Bestäm inversen f^{-1}.

A. Vi ska studera $f(x) = x^4 - 4x^2$ för $x > 0$. Vi ser att f är definierad och kontinuerlig för alla sådana x och $f'(x) = 4x^3 - 8x$ är också definierat för alla sådana x. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff 4x(x^2-2) = 0$. I intervallet $x > 0$ är alltså derivatan noll om och endast om $x = \sqrt{2}$. Vi teckenstuderar derivatan och får:

Om $0 < x < \sqrt{2}$ så är $f'(x) < 0$. Det följer att f är strängt avtagande i intervallet $0 < x < \sqrt{2}$.

Om $x > \sqrt{2}$ så är $f'(x) > 0$. Det följer att f är strängt växande i intervallet $x > \sqrt{2}$. Vi kan alltså dra slutsatsen att f har invers på intervallet $(0, \sqrt{2})$ men att f saknar invers på varje intervall $(0, d)$ där $d > \sqrt{2}$. Eftersom $f(0) = 0$ och $f(\sqrt{2}) = -4$ är inversen definierad på intervallet $(-4, 0)$.

B. Vi beräknar inversen, genom att lösa ut x ur ekvationen $x^4 - 4x^2 = y$, där vi har $0 < x < \sqrt{2}$ och $-4 < y < 0$. Eftersom ekvationen är en andragradsekvation i x^2 får vi med pq-formeln att $x^2 = 2 \pm \sqrt{4+y}$ där vi måste välja den negativa roten. Eftersom x är positivt får vi sedan $x = \sqrt{2 - \sqrt{4+y}}$, där $-4 < y < 0$. Det vill säga:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{2 - \sqrt{4+y}}, \qquad -4 < y < 0.$$

Svar: Största intervallet är $(0, \sqrt{2})$, inversens definitionsmängd är $(-4, 0)$ och inversen är $f^{-1}(y) = \sqrt{2 - \sqrt{4+y}}$.