



KTH Teknikvetenskap

**SF1625 Envariabelanalys  
Tentamen  
2011-03-16**

Skrivtid: 5 timmar

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Lars Filipsson

Kursansvariga lärare: Jockum Aniansson, Kristian Bjerklöv, Karim Daho, Tomas Ekholm, Lars Filipsson, Armin Halilovic, Jens Hoppe, Göran Hulth, Axel Hultman, Kirsti Mattila, Serguei Shimorin, Jan-Olov Strömberg.

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På uppgifterna 1-3, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminariererie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminariererie ger 4 poäng. För att höja poängen från den löpande examinationen från 3 till 4 poäng krävs att hela uppgiften löses korrekt. Resultatet från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4-6 utgör del B och uppgifterna 7-9 utgör del C. Del C är främst till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av:

Betyg:	A	B	C	D	E	Fx
Poängsumma:	27	24	21	18	16	15
Poäng del C:	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar förklaras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng. *Lycka till!*

————— DEL A —————

1. Skissera kurvan  $y = \frac{e^{-x}}{2x-1}$  med hjälp av ett teckenstudium av derivatan. Bestäm alla lokala extrempunkter och asymptoter.
2. Betrakta integralen  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 x \sin x \, dx$ .
  - A. Använd substitutionen  $u = \cos x$  för att skriva om integralen.
  - B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.
3. Beräkna volymen av den rotations kropp som fås då området som begränsas av kurvan  $y = \sqrt{x}e^{-x}$ , linjen  $x = 2$  och  $x$ -axeln roterar kring  $x$ -axeln.

————— DEL B —————

4. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen  $f(x) = \frac{x}{3-x}$ .
5. Betrakta differentialekvationen  $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2t$ .
  - A. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
  - B. Bestäm den lösning som också uppfyller  $y(0) = 3$  och  $y'(0) = 4$ .
6. En 10 meter hög cylindrisk silo med radie 2 meter är fullpackad. Man antar att materialet som fyller silon har en densitet  $\rho$  som varierar med höjden så att densiteten på höjden  $x$  över bottenplattan ges av formeln  $\rho(x) = 100 - x^2$  kilogram per kubikmeter. Hur mycket väger materialet i silon?

————— DEL C —————

7. A. Förklara i vilken mening  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$  är en generaliserad integral och avgör om den är konvergent eller divergent.  
B. Avgör om serien  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$  är konvergent eller divergent.
8. Bestäm  $a \in \mathbf{R}$  så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^3 - 8) \sin(x - 2)}{(x - 2)^2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Är  $f$  sedan deriverbar i alla punkter  $x \in \mathbf{R}$ ?

9. A. Bestäm det största intervallet  $(0, d)$ , med  $d > 0$ , där funktionen  $f(x) = x^4 - 4x^2$  har invers. Bestäm också intervallet där inversen  $f^{-1}$  är definierad.  
B. Bestäm inversen  $f^{-1}$ .