KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen
2010-08-25

1. **Bestäm de intervall där $f(x) = x^2 - \ln x$, är växande.**

Vi observerar att definitionsmängden till f är $x > 0$. Vi deriverar och får $f'(x) = 2x - 1/x$ som existerar för alla $x > 0$. Vi teckenstuderar derivatan och ser att $f'(x) < 0$ då $0 < x < 1/\sqrt{2}$, $f'(1/\sqrt{2}) = 0$, och $f'(x) > 0$ då $x > 1/\sqrt{2}$. Det följer av detta att f är växande på intervallet $x \geq 1/\sqrt{2}$ och inte på något annat intervall.

Svar: f är växande på intervallet $x \geq 1/\sqrt{2}$ och inte på något annat intervall.

2. **Beräkna med hjälp av partialbråksuppdelning integralen**

$$\int_2^3 \frac{10x}{x^2 - 10x + 24}\, dx.$$

Med hjälp av partialbråksuppdelning får vi att

$$\begin{aligned}
&\int_2^3 \frac{10x}{x^2 - 10x + 24}\, dx = \int_2^3 \left(\frac{30}{x-6} - \frac{20}{x-4} \right) dx \\
&= [30 \ln|x-6| - 20 \ln|x-4|]_2^3 \\
&= 30 \ln|3-6| - 20 \ln|3-4| - 30 \ln|2-6| + 20 \ln|2-4| \\
&= 30 \ln \frac{3}{4} + 20 \ln 2.
\end{aligned}$$

3. **Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$ och x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ roteras kring x-axeln.**

Volymen ges av

$$\int_0^\pi \pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

SVar: $\pi^2/2$

4. **A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x^2)$.**
B. Använd svaret på uppgift A när du approximativt beräknar arean mellan kurvan $y = \ln(1 + x^2)$ och x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$.

A. Vi deriverar och får $f'(x) = 2x/(1 + x^2)$ och $f''(x) = (2(1 + x^2) - (2x)^2)/(1 + x^2)^2$ och följaktligen är $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ och $f''(0) = 2$. Därför är det sökta Taylorpolynomet $p(x) = x^2$.

B. Den sökta arean ges av $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln(1 + x^2) \, dx$. Men eftersom $\ln(1 + x^2) \approx x^2$ för x nära origo (enligt uppgift A) är den sökta arean approximativt $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2 \, dx = 1/24$.

Svar: A. $p(x) = x^2$. B. 1/24.

(Den som är bra på att integrera kan förstås räkna ut integralen exakt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \ln(1 + x^2) \, dx &= [x \ln(1 + x^2)]0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2x^2}{1 + x^2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - \int_0^{1/2} \left(\frac{2 + 2x^2}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - 1 + 2 \arctan \frac{1}{2}.)
\end{aligned}$$

5. **En kropp med massan m rör sig rätlinjigt med hastigheten $v(t)$. Den utsätts för en bromsande kraft $-k \cdot v(t)$, där k är en positiv konstant. Om vi antar att inga andra krafter påverkar kroppen så gäller enligt kraftekvationen att $m\frac{dv}{dt} = -k \cdot v(t)$. Bestäm hastigheten som funktion av tiden, om $k = 1$, $m = 2$ kg och $v(0) = 5$ m/s. Avgör sedan också hur lång sträcka kroppen rör sig efter tidpunkten $t = 0$.**

Vi ska först lösa differentialekvationen $v' + \frac{1}{2}v = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r + 1/2 = 0$ har lösning $r = -1/2$ varför diffekvationens allmänna lösning är $v(t) = Ce^{-t/2}$. Med hjälp av initialvillkoret kan vi nu bestämma C. Eftersom $v(0) = Ce^0 = C$ ser vi att vi ska välja $C = 5$ för att få $v(0) = 5$. Hastigheten som funktion av tiden ges alltså av $v(t) = 5e^{-t/2}$. Sträckan $S(T)$ som kroppen rör sig från tidpunkten $t = 0$ till tidpunkten $t = T$ ges av

$$S(T) = \int_0^T 5e^{-t/2}\,dt = 5[-2e^{-t/2}]_0^T = 10 - e^{-T/2}.$$

Eftersom $\lim_{T\to\infty} S(T) = 10$ så ser vi att kroppen, om den får fortsätta att röra sig hur länge som helst, kommer att förflytta sig 10 meter.

Svar: $v(t) = 5e^{-t/2}$. 10 meter.

6. **Beräkna integralen $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$ på två olika sätt: A. Med hjälp av partiell integration. B. Med hjälp av substitutionen $u = \sqrt{1-x}$.**

A. Vi använder partiell integration och får

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} = [-x(1-x)^{3/2}/(3/2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{3/2}}{3/2}\,dx = \left[\frac{-(1-x)^{5/2}}{(3/2)(5/2)}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

B. Vi använder substitutionen $u = \sqrt{1-x}$, som är injektiv, med $du = -dx/2\sqrt{1-x}$, vilket betyder att $x = 1-u^2$ och $dx = -2u\,du$ och $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$ och $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$. Vi får:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_1^0 -2u^2(1-u^2)\,du = \frac{4}{15}.$$

Svar: 4/15

7. **Vilken är den största area en rektangel i xy-planet kan ha om dess ena hörn ska vara i origo och det diagonalt motsatta hörnet ska ligga någonstans i området $x > 0$, $y > 0$, $y \leq \frac{9}{x+1} - 1$?**

Om rektangeln ska vara axelparallell:

Den största arean fås uppenbart om man väljer det motsatta hörnet PÅ kurvan, dvs i en punkt där $y = \frac{9}{x+1} - 1$. I så fall blir arean

$$A(x) = x(\frac{9}{x+1} - 1) = \frac{8x - x^2}{x+1},$$

där $x > 0$ enligt villkoren i uppgiften. Vi deriverar och får (efter förenkling)

$$A'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x+1)^2}.$$

Enda nollstället för positiva x av $A'(x)$ inträffar när $x = 2$. Vi ser också att $A'(x)$ är positiv för $0 < x < 2$, så A är strängt växande här, och att $A'(x)$ är negativ för $x > 2$, så A är strängt avtagande här. Det följer att största värdet för funktionen A inträffar när $x = 2$. Det största värdet är $A(2) = 4$. Den största area vi kan få är alltså 4, om rektangeln måste vara axelparallell.

Om rektangeln inte behöver vara axelparallell blir problemet ett annat, här är en skiss på hur man kan tänka i det fallet:

Först observerar vi att av alla rektanglar med samma längd på diagonalen så är det kvadraten som har störst area. Ty om vi har en rektangel med diagonalen d och bredden x så är höjden $\sqrt{d^2 - x^2}$ och arean $A(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$ antar sitt maximum för $x = d/\sqrt{2}$. Detta eftersom $A'(x) = (d^2 - 2x^2)/\sqrt{d^2 - x^2}$ som är positivt då $0 < x < d/\sqrt{2}$, noll då $x = d/\sqrt{2}$ och negativt då $x > d/\sqrt{2}$.

Det gäller därför att försöka maximera diagonalen i rektangeln. Låt $f(x) = \dfrac{9}{x+1} - 1$, som är definierat för $x \geq 0$. Då är $f'(x) = -9/(x+1)^2$ som är negativt för $x \geq 0$ vilket medför att f är avtagande där. Och $f''(x) = 18/(x+1)^3$ som är positivt för $x \geq 0$ vilket medför att kurvan f är konvex där. Detta betyder att vi ska välja den diagonalt motsatta punkten där kurvan skär någon av axlarna, dvs i någon av punkterna $(8, 0)$ och $(0, 8)$, som båda ger diagonalens längd 8 och arean 32. Men dessa punkter ligger inte i det område som specificerades i uppgiften, där det krävdes att både x och y skulle vara positiva! I detta fall finns alltså ingen största area - rektanglar som uppfyller kraven i uppgiften kan ha area som ligger hur nära 32 som helst, men ingen av dem uppnår den arean.

Svar: För axelparallella rektanglar är maxarean 4. För godtyckliga rektanglar saknas maximum.

8. **Avgör om det är sant att** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq 3.$

Vi observerar att för varje positivt heltal k gäller att $\dfrac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}k} = \dfrac{1}{k^{3/2}}$.
Det följer att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Sätt $f(x) = x^{-3/2}$. Då är f avtagande på intervallet $x \geq 1$ (eftersom $f'(x) = -(3/2)x^{-5/2} < 0$) och följaktligen är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx = 1 + \int_1^{\infty} x^{-3/2}\, dx = 3.$$

SVar: Ja.

9. **Bestäm konstanten a så att funktionen**

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i origo. Med a valt på detta sätt, avgör om f är deriverbar i origo.

När x går mot 0 går $1/x^2$ mot oändligheten. Vi har därför att $\lim_{x\to 0} \arctan(1/x^2) = \pi/2$. För att f ska vara kontinuerlig i origo krävs därför att $a = \pi/2$, ty då blir $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Med detta val av a undersöker vi deriverbarheten. Enligt derivatans definition är

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\arctan(1/h^2) - \pi/2}{h} = \{\text{l'Hospital}\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+(1/h^2)^2}(-2/h^3)}{1} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h^4+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Funktionen är alltså deriverbar med derivata 0 i origo.

Svar: $a = \pi/2$, funktionen är deriverbar med derivata 0 i origo.