



KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-02-11

DEL A

1. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = xe^{-x^2/4}$.

Lösningsförslag. Standardgränsvärdet $xe^{-x} \rightarrow 0$, då $x \rightarrow \infty$ ger att

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2/4}{e^{x^2/4}} \cdot \frac{4}{x} = 0.$$

Dessa gränsvärden tillsammans med att f är kontinuerlig och deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$ ger att funktionens maximala och minimala värde återfinns i de stationära punkterna för f . Vi har att

$$f'(x) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-x^2/4}$$

och att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = \pm\sqrt{2}$. Vi får att

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{\frac{2}{e}}$$

och

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Alltså ges värdemängden av

$$V_f = \left[-\sqrt{\frac{2}{e}}, \sqrt{\frac{2}{e}}\right].$$

Svar.

$$V_f = \left[-\sqrt{\frac{2}{e}}, \sqrt{\frac{2}{e}}\right].$$

2. Beräkna integralen

$$\int_0^2 \frac{\pi(x-3) + 5x}{x^2 - x - 6} dx.$$

Lösningförslag. Låt oss partialbråksuppdelning. Ansätt

$$\frac{\pi(x-3) + 5x}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Högerledet kan skrivas om så att

$$\frac{\pi(x-3) + 5x}{x^2 - x - 6} = \frac{Ax + 2A + Bx - 3B}{(x-3)(x+2)}.$$

Vi får ekvationerna $A + B = \pi + 5$ och $2A - 3B = -3\pi$ som har lösningen $A = 3$ och $B = 2 + \pi$. Alltså kan integralen nu beräknas enligt följande

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{\pi(x-3) + 5x}{x^2 - x - 6} dx &= \int_0^2 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{2+\pi}{x+2} \right) dx \\ &= [3 \ln|x-3| + (2+\pi) \ln|x+2|]_0^2 \\ &= 3 \ln 1 + (2+\pi) \ln 4 - 3 \ln 3 - (2+\pi) \ln 2 \\ &= (2+\pi) \ln 2 - 3 \ln 3. \end{aligned}$$

Svar. $(2 + \pi) \ln 2 - 3 \ln 3$

3. En vattenreservoar har förorenats av ett giftigt ämne. En naturlig rening sker genom att rent vatten rinner in i reservoaren samtidigt som förorenat vatten rinner ut i samma takt. I en modell över förloppet antas att koncentrationen $K(t)$ av det giftiga ämnet vid tiden t s uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dK}{dt}(t) = \frac{-K(t)}{1500}.$$

Hur lång tid tar det enligt denna modell för koncentrationen av det giftiga ämnet att halveras?

Lösningförslag. Lösningen till den karakteristiska ekvationen $r + 1/1500 = 0$ är $r = -1/1500$. Alltså har differentialekvationen lösningen $K(t) = Ce^{-t/1500}$. Vid tiden t s har vi koncentrationen $K(t)$. Vi vill beräkna halveringstiden, dvs tiden T så att $K(t + T) = K(t)/2$ vilket är detsamma som att

$$Ce^{-(t+T)/1500} = \frac{Ce^{-t/1500}}{2}$$

eller ekvivalent

$$e^{-T/1500} = \frac{1}{2}.$$

Löser vi ut T så får vi $T = -1500 \ln(2^{-1}) = 1500 \ln 2$.

Svar. Halveringstiden är $1500 \ln 2$.

DEL B

4. Låt $f(x) = e^x \cos x$.

(a) Bestäm MacLaurinpolynomet (Taylorpolynomet vid $x = 0$) av grad 1 till f .

(2 p)

(b) Visa att

(2 p)

$$|f(x) - 1 - x| < 3,$$

då $0 \leq x \leq 1$.

Lösningförslag.

(a) MacLaurinpolynomet p_1 av grad 1 till f ges av $p_1(x) = f(0) + f'(0)x$. Vi har att $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$ och $f'(0) = 1$. Alltså får vi att

$$p_1(x) = 1 + x.$$

(b) Resttermen ges av

$$f(x) = p_1(x) + \frac{f''(\theta x)x^2}{2!} = 1 + x + \frac{f''(\theta x)x^2}{2!}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Vi får $f''(x) = e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \sin x - e^x \cos x = -2e^x \sin x$. Alltså gäller för $0 \leq x \leq 1$ att

$$|f(x) - 1 - x| = \left| \frac{-2e^{\theta x} \sin(\theta x)x^2}{2} \right| \leq |e^{\theta x} x^2| \leq |e^1| < 3.$$

Svar.

(a) $1 + x$

(b) se lösning.

5. Visa att olikheten

$$\ln x^2 < x - \frac{1}{x},$$

gäller för $x > 1$.

Lösningförslag. Låt oss bilda funktionen $f(x) = x - 1/x - \ln(x^2)$ för $x > 1$. Låt oss studera funktionsgrafen till f . Vi har att

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

och att

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0,$$

då $x > 1$. Eftersom f uppfyller att $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ och är strängt växande så följer att $f(x) > 0$ och således att

$$\ln x^2 < x - \frac{1}{x},$$

gäller för $x > 1$.

Svar. Se lösningen.

6. Låt a vara ett reellt tal. Kurvan $y = x^{-a}$, $1 \leq x < \infty$ roterar ett varv kring x -axeln. För vilka värden på parametern a har den erhållna rotationskroppen en ändlig volym? Bestäm volymen för sådana a .

Lösningförslag. Rotationen kring x -axeln ges av

$$\begin{aligned} V_a &= \int_1^\infty \pi \frac{1}{x^{2a}} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \pi \frac{1}{x^{2a}} dx \\ &= \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1-2a)x^{2a-1}} \right]_1^R = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1-2a)R^{2a-1}} - \frac{1}{(1-2a)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2a-1} \end{aligned}$$

om och endast om $2a - 1 > 0$, dvs då $a > 1/2$. Då $a < 1/2$ så är integralen divergent eftersom

$$\frac{1}{(1-2a)R^{2a-1}} \rightarrow +\infty, \quad \text{då } R \rightarrow \infty.$$

När $a = 1/2$ så är också integralen divergent ty

$$\begin{aligned} V_{1/2} &= \int_1^\infty \pi \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \pi \frac{1}{x} dx \\ &= \pi \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^R = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty. \end{aligned}$$

Svar. Volymen är ändlig om och endast om $a > 1/2$ och volymen är då $\frac{\pi}{2a-1}$.

DEL C

7. (a) Definiera vad som menas med att serien (2 p)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

är konvergent.

- (b) Antag att $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ är positiv, kontinuerlig, avtagande och sådan att $f(j) = a_j$ för varje $j = 1, 2, 3, \dots$ (2 p)

Visa att om

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

är konvergent så är även serien i (a) konvergent.

Lösningförslag.

- (a) Serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

är konvergent om gränsvärdet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N a_j$$

existerar.

- (b) Låt oss studera följden

$$a_N := \sum_{j=1}^N a_j.$$

Vi vill visa att denna följd konvergerar. Detta kan göras genom att visa att följden är växande och uppåt begränsad. Eftersom termerna är positiva växer följden. Det återstår att visa att följden är uppåt begränsad. Vi kan använda jämförelsesatsen med integraler eftersom f är avtagande, positiv och kontinuerlig. Vi har att

$$\sum_{j=1}^N a_j \leq \int_0^N f(x) dx \leq \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Eftersom integralen är konvergent så är följden a_N uppåt begränsad och därmed konvergent.

Svar. se lösning.

8. Låt $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad som

$$I(x) = \int_0^x (1 + \sin(t^2)) dt.$$

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I(x)}{2x}.$$

Lösningförslag. Vi använder MacLaurinutveckling av I . Alltså

$$I(x) = I(0) + I'(0)x + x^2B(x),$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning av $x = 0$. Vi har att $I(0) = 0$ och att $I'(x) = 1 + \sin(x^2)$, vilket ger att $I'(0) = 1$. Gränsvärdet ges därför av

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2B(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{xB(x)}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Svar. $1/2$

9. Låt a vara en reell konstant. För vilka värden på a är funktionen $f(x) = (x + a)|x|$ deriverbar i punkten $x = 0$?

Lösningförslag. Funktionen f är deriverbar i $x = 0$ om och endast om

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

existerar. Låt först $h > 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{(h + a)h - 0}{h} \rightarrow a,$$

då $h \rightarrow 0$. Låt nu $h < 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-(h + a)h - 0}{h} \rightarrow -a,$$

då $h \rightarrow 0$. För att dessa gränsvärden ska vara lika så måste $a = 0$. Alltså är f deriverbar i $x = 0$ om och endast om $a = 0$.

Svar. f är deriverbar i $x = 0$ om och endast om $a = 0$.
