KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-01-09

DEL A

1. Låt funktionen f ges av
$$f(x) = e^{\frac{x^2-x+1}{x}}.$$

(a) Avgör på vilka intervall f är definierad. **(1p)**
(b) Avgör på vilka intervall f är växande. **(1p)**
(c) Bestäm höger- och vänstergränsvärdena för f då $x \to 0$. **(1p)**
(d) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar och om det gör det, bestäm det. **(1p)**

Lösningsförslag.

(a) Eftersom $\frac{x^2-x+1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$ är definierad omm $x \neq 0$ och e^t är definierad för alla t, är f definierad precis på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, \infty[$.

(b) Vi deriverar f med kedjeregeln och får $f'(x) = e^{\frac{x^2-x+1}{x}} \cdot D(x - 1 + \frac{1}{x}) = e^{\frac{x^2-x+1}{x}} \cdot (1 - \frac{1}{x^2})$.
Eftersom $e^t > 0$ för alla reella t, är $f'(x) > 0$ omm $1 - \frac{1}{x^2} > 0$, dvs omm $\frac{1}{x^2} < 1$, dvs omm $x^2 > 1$, dvs omm $x < -1$ eller $x > 1$. Det gör också att om $x > 1$ är $f(x) > f(1)$ och om $x < -1$ är $f(x) < f(-1)$, så f är växande på de halvslutna intervallen $]-\infty, -1]$ och $[1, \infty[$ (se sats 16, sid. 215 i läroboken).

(c) $x - 1 + \frac{1}{x} \to \infty$ då $x \to 0+$ och $e^t \to \infty$ då $t \to \infty$, så $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$.
$x - 1 + \frac{1}{x} \to -\infty$ då $x \to 0-$ och $e^t \to 0$ då $t \to -\infty$, så $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

(d) Eftersom $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty \neq \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$ existerar $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ **inte**.

Svar.

(a) f är definierad precis på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, \infty[$.
(b) f är växande precis på de halvslutna intervallen $]-\infty, -1]$ och $[1, \infty[$.
(c) Högergränsvärdet $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ och vänstergränsvärdet $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.
(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ existerar inte.

2. Beräkna integralen **(4p)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

Lösningsförslag. Eftersom x^2:s derivator är enkla att finna och blir 0 efter ett ändligt antal derivationer, medan $\cos x$ är enkel att finna succesiva primitiva funktioner till, kan vi använda partialintegration:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx = [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx =$
$= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left([2x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(-\cos x) \, dx \right) =$
$= [x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 + \pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$

Svar. Integralens värde är $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

3. Finn med hjälp av Taylor-/Maclaurinutveckling ett närmevärde till $\cos(\frac{1}{2})$ med ett fel som till beloppet är mindre än $0,003$. **(4p)**

Lösningsförslag. Enligt Taylor/Maclaurins formel gäller om f är $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{där } 0 < \theta < 1.$$

Då $f(x) = \cos x$ fås $f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0$ och $f^{(4)}(x) = \cos x$, så $\cos x = 1 + 0 - \frac{x^2}{2} + 0 + \frac{\cos(\theta x)}{24}x^4$.
Det ger $\cos(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{\cos\xi}{24\cdot 2^4}$, där $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Eftersom $\cos$ är positiv och avtagande i intervallet $[0, \frac{1}{2}]$ gäller $1 > \cos\xi > \cos(\frac{1}{2}) > \frac{7}{8}$ (det sista eftersom resttermen ovan är > 0).
Om vi som approximation tar värdet mitt i intervallet (dvs approximerar resttermen med $\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{24\cdot 16}$) får vi $\cos(\frac{1}{2}) \approx 1 - \frac{1}{8} + \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{24\cdot 16} = \frac{1797}{2048} \approx 0,87744$, med ett fel som till beloppet är $< \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{24\cdot 16} < 0,00017$.
Här räcker det i själva verket att approximera $\cos(\frac{1}{2})$ med $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$ och felet till beloppet $\leq \frac{1}{24\cdot 16} < 0,0027$ (dvs bara använda att $|\cos\xi| \leq 1$).
(Räknedosan ger värdet $\cos(\frac{1}{2}) \approx 0,87758$.)

Svar. En tillräcklig approximation är $\frac{7}{8} = 0,875$. En lite bättre är $\frac{1797}{2048}(\approx 0,87744)$.

DEL B

4. Vid tillverkning av en keramisk produkt tas den ur ugnen vid temperaturen 800°C och sätts att svalna i rumstemperatur.
Professor P vid Smockholts universitet föreslår följande matematiska modell för avsvalningsförloppet:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{10}(T-20), \\ T(0) = 800. \end{cases} \qquad (*)$$

($T(t)$ är här produktens temperatur vid tidpunkten t minuter efter uttaget ur ugnen.)
(a) Lös initialvärdesproblemet $(*)$. **(3p)**
(b) Diskutera modellens rimlighet. **(1p)**

Lösningsförslag.

(a) För att lösa problemet söker vi först den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{10}T$. Dess karakteristiska ekvation är $r = \frac{1}{10}$, så $T_h(t) = Ce^{\frac{1}{10}t}$, C en godtycklig konstant.
En partikulärlösning till den inhomogena ekvationen är tydligen $T_p(t) = 20$ (som man, om man inte ser den direkt, kan få med ansatsen $T = a$, en konstant, och insättning i ekvationen). Den allmänna lösningen till ekvationen är då $T(t) = T_h + T_p = 20 + Ce^{\frac{1}{10}t}$.
Konstanten C bestäms av begynnelsevillkoret $T(0) = 800$: $20+Ce^0 = 20+C = 800$, som ger $C = 780$. Lösningen till $(*)$ är alltså $T(t) = 20 + 780 \cdot e^{\frac{1}{10}t}$.

(b) Modellen är inte rimlig för att beskriva den aktuella situationen, eftersom lösningen $\to \infty$ då $t \to \infty$. För att beskriva utjämning av temperaturen bör konstanten (som här var $\frac{1}{10}$) vara negativ.

Svar.

(a) Lösningen är $T(t) = 20 + 780 \cdot e^{\frac{1}{10}t}$.
(b) Modellen är inte rimlig. Konstanten framför $T - 20$ bör vara negativ.

5. Finn alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$, $x > -1$, genom att först utföra variabelbytet $t = \sqrt{x+1}$. Svaret skall uttryckas i variabeln x. **(4p)**

Lösningsförslag. Enligt lydelsen gör vi variabelbytet $t = \sqrt{x+1}$,
som ger $t^2 = x+1,\ x = t^2-1,\ dx = 2t\,dt$.
Den sökta primitiva funktionen är
$\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{1+t}{1-t}\,2t\,dt = \int \frac{-2t^2-2t}{t-1}\,dt = \int \left(-2t-4-\frac{4}{t-1}\right)\,dt =$
$= -t^2-4t-4\ln|t-1|+C_1 = -(x+1)-4\sqrt{x+1}-4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C_1 =$
$= -x-4\sqrt{x+1}-4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$, definierad i intervallen $]-1,0[$ och $]0,\infty[$.
$C (= C_1 - 1)$ är godtycklig, konstant i vart och ett av intervallen.

Svar. Alla primitiva funktioner ges av $F(x) = -x-4\sqrt{x+1}-4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$, definierad för $x > -1, \neq 0$. C är konstant i vart och ett av intervallen $]-1,0[$ och $]0,\infty[$.

6. Låt
$$f(x) = -3\ln(|x|) + \frac{x^2+2x-2}{x}.$$
(a) Bestäm alla lokala extrempunkter och deras värden för funktionen f. **(3p)**
(b) Finn antalet lösningar x till ekvationen $f(x) = 2$. **(1p)**

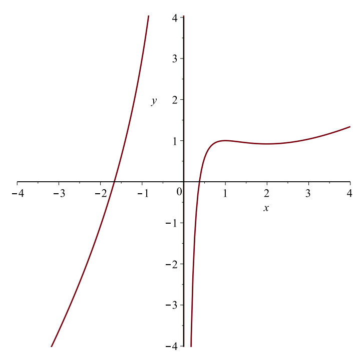
Lösningsförslag.

(a) Vi skriver funktionen som $f(x) = -3\ln|x| + x + 2 - \frac{2}{x}$ och finner derivatan $f'(x) = -\frac{3}{x} + 1 + 0 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$. f:s extrempunkter finns bland f':s nollställen, $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1. \end{cases}$ Vi finner $f(1) = -3\cdot 0 + 1 + 2 - \frac{2}{1} = 1$ och $f(2) = -3\ln 2 + 2 + 2 - \frac{2}{2} = 3 - 3\ln 2$ och ställer upp en tabell:

x	"$-\infty$"		"$0-$"	0	"$0+$"		1		2		"∞"
$f'(x)$		$+$		$\wr$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞	$\wr$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$3-3\ln 2$	$\nearrow$	∞

där vi också har fört in att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ (alla termer $\to -\infty$ eller 0) och då $x \to 0+$ (ty $\frac{2}{x} \to \infty$, $x \cdot \ln|x| \to 0$) och att $f(x) \to \infty$ då $x \to 0-$ (alla termer $\to \infty$ eller 0) och då $x \to \infty$ (ty $x \to \infty$, $\frac{\ln|x|}{x} \to 0$).
Vi läser av i tabellen att f har ett maximum $= 1$ för $x = 1$ och ett minimum $= 3 - 3\ln 2$ för $x = 2$.

(b) Eftersom f går från $-\infty$ till ∞ då x går från $-\infty$ till $0-$ och f är kontinuerlig och strängt växande i det intervallet, har ekvationen $f(x) = 2$ precis en lösning där.
I tabellen kan vi på samma sätt se att $f(x) \leq 1$ då $0 < x < 2$ och antar värdet 2 precis en gång i intervallet $]2, \infty[$, så ekvationen har precis en lösning där.
Totalt har ekvationen alltså två lösningar.



Svar.

(a) f har ett maximum $= 1$ för $x = 1$ och ett minimum $= 3 - 3\ln 2$ för $x = 2$.
(b) Ekvationen har två lösningar.

DEL C

7. Formulera och bevisa l'Hospitals regel för beräkning av gränsvärden av formen

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Glöm inte att ange villkor för funktionerna f och g. **(4p)**

Lösningsförslag. Regeln (som den är formulerad i boken) säger att om $f(0) = g(0) = 0$, f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara i en omgivning av $x = 0$ och $g'(0) \neq 0$ så gäller

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Den följer av att Maclaurins formel ger (med förutsättningarna om deriverbarhet) att $f(x) = f(0) + f'(0)x + x^2B_1(x) = f'(0)x + x^2B_1(x)$ och $g(x) = g(0) + g'(0)x + x^2B_2(x) = g'(0)x + x^2B_2(x)$, där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade i en omgivning till $x = 0$ (vi använde att $f(0) = g(0) = 0$).

Det betyder att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)x + x^2B_1(x)}{g'(0)x + x^2B_2(x)} = \frac{f'(0) + xB_1(x)}{g'(0) + xB_2(x)} \to \frac{f'(0)}{g'(0)} \text{ då } x \to 0.$$

Där vi använde att $g'(0) \neq 0$. Eftersom $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ följer påståendet.

Oftast formuleras satsen betydligt allmännare:

Om f och g är definierade och deriverbara i en punkterad omgivning till $x = a$ (dvs för alla x med $0 < |x-a| < \varepsilon$ för något $\varepsilon > 0$) och $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ eller $= \infty$ och $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ så är $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. (Både a och L kan vara $\pm\infty$.)

(Det kan dock hända att $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existerar utan att $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ gör det.)

Svar. Se lösningen.

8. (a) Betrakta en grafkurva $y = y(x),\ a \le x \le b$. **(2p)**
Ställ upp en integral vars värde ger kurvans längd och motivera varför den gör det.
(b) Beräkna längden av kurvan **(2p)**

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{\cos(2t)}\,dt,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

Lösningsförslag.

(a) Vi delar in $[a, b]$ i n delintervall, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ och approximerar kurvans längd genom att addera avstånden mellan intilliggande punkter $(x_{k-1}, y(x_{k-1}))$ och $(x_k, y(x_k))$ på kurvan. Med $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ och $\Delta y_k = y(x_k) - y(x_{k-1})$ blir avståndet (Pythagoras sats) $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ och approximationen

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (\tfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k})^2}\,\Delta x_k.$$

Om $y(x)$ (som i uppgift b)) är deriverbar ger medelvärdessatsen att $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = y'(\xi_k)$ för något $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$ och vår approximation blir $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k$, en Riemannsumma. Om y' är kontinuerlig är också $\sqrt{1 + (y'(x))^2}$ det och summan går då alla delintervallens längder går mot 0 mot

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

(Att summan går mot samma värde då maximala intervalllängden går mot 0, oberoende av hur indelningarna av $[a, b]$ i övrigt ser ut, kan tas som en definition av att kurvan har en längd och gränsvärdet då som definition av längden.)

(För full poäng på uppgiften räcker en mer intuitiv beskrivning än ovanstående.)

(b) Enligt analysens huvudsats (sid. 306 i läroboken) är $y'(x) = \sqrt{\cos(2x)}$, så kurvans längd blir $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\sqrt{\cos(2x)})^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos(2x)}\,dx =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\cos^2 x}\,dx =$
$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos x|\,dx.$
Då $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ är $\cos x > 0$, så kurvans längd är
$\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \sqrt{2}\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0) = 1$ (l.e.).

Svar.

(a) Kurvans längd ges av $\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$, motiverat i lösningen ovan.
(b) Kurvans längd är 1 l.e.

9. (a) Avgör om följande serie är konvergent eller divergent **(2p)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

(b) Avgör om följande integral är konvergent eller divergent **(2p)**

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

Lösningsförslag.

(a) Eftersom e^x är > 0 och växande (ty $D(e^x) = e^x > 0$) och $-\frac{1}{n^2} \geq -1$ då $n \geq 1$, är $e^{-\frac{1}{n^2}} \geq e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$.

Det ger att $\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n} > 0$. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (och därmed $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n}$) är divergent (välkänd sats, följer av Cauchys integralkriterium eftersom funktionen $\frac{1}{x}$ är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 1$ och $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ är divergent), så enligt satsen om dominerad konvergens för positiva serier (sid. 3 i häftet om serier) är den givna serien divergent.

(b) Eftersom (Maclaurins formel) $e^x = 1+x+x^2B(x)$, där $B(x)$ är en begränsad funktion (i en omgivning till 0 och därmed i varje begränsat intervall, eftersom den är kontinuerlig då $x \neq 0$), får vi $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{x+x^2B(x)}{x\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}B(x))\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_0^1 \sqrt{x}B(x)\, dx$, där båda integralerna i sista ledet är konvergenta (den första är $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2$ och integranden i den andra är kontinuerlig och begränsad), så den givna integralen är också konvergent.

Svar.

(a) Serien är divergent.

(b) Integralen är konvergent.
