

## KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2009-08-20, kl. 14.00-19.00

SF1626, flervariabelanalys för CINTE1 och CMIEL1 samt CSAMH1 (7,5hp)

Göran och Karim.

**Preliminära gränser.** Registrerade på kursen SF1624 får graderat betyg enligt skalan A (högsta betyg), B, C, D, E (lägsta godkända betyg), F (underkänt). Betygsgränserna är

26-28p för betyg A; 23-25p för betyg B; 20-22p för betyg C; 17-19p för betyg D; 14-16p för betyg E.

Den som fick 13p får tillfälligt betyg Fx som kan kompletteras till betyg E. Om kompletteringen misslyckas förvandlas betyget Fx till F. Kontakta i så fall läraren!

De som är redan registrerade på 5B1146 får betyg 5, 4, 3, K, U enligt det gamla systemet. Betygsgränserna då är 26p för betyg 5; 22p för betyg 4; 14p för betyg 3. Den som fick 13p får tillfälligt att kompletteras till betyg 3

**Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningförslaget skall textförklaras. Bristande läsbarhet medför poängavdrag. ( Kladdpaper skall inte lämnas in.) Inga hjälpmedel!**

Den som blivit godkänd på KS  $X$ ,  $1 \leq X \leq 4$ , hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS  $X$ , så skall motsvarande tal  $X$  inte räknas om.

### 3-poängsuppgifter

- Bestäm riktningsderivatan av funktionen  $f(x, y, z) = \sin xy + \tan yz$  i punkten  $P_0 = \left(0, \frac{\pi}{4}, 1\right)$  i riktningen mot punkten  $P_1 = \left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ . Finns det någon riktning  $\mathbf{v}$  där  $f'_{\mathbf{v}}(P_0) = 1$ ?
- Bestäm lokala extrempunkter till funktionen  $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$  och ange deras karaktär.
- Beräkna volymen av den kropp som har basyta  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 + 2x \leq 1\}$  och höjd  $z = x^2 + y^2$ .
- Betrakta funktionen  $f(x, y) = 6x + 2y$  och den slutna ellipsskivan  $3x^2 + y^2 \leq 16$ .
  - Förklara (ange en sats) varför man i förväg vet att  $f$  antar ett största och ett minsta värde på ellipsskivan.
  - Bestäm dessa värden.

**Var god vänd**

#### 4-poängsuppgifter

5. Betrakta funktionen  $f(x,y) = 3xy + \sin(x + y)$ .
- Visa, tex genom att åberopa en lämplig sats, att  $f$  är en differentierbar funktion.
  - Visa att funktionen  $\mathbf{g} = (u,v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$  är lokalt inverterbar i hela planet.
  - Bestäm Jacobimatrisen i punkten  $(u,v) = (1,1)$  för den lokala inversen  $\mathbf{g}^{-1}$ .

6. Beräkna kurvintegralen  $\int_{\gamma} (-y^3 + 1)dx + (2x^3 + e^{y^2})dy$ , där  $\gamma$  är ellipsbågen  $2x^2 + y^2 = 1$  genomlöpen moturs från punkten  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  till punkten  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ .

7. Givet kroppen  $K = \{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$  med masstäthet

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

För vilka  $\alpha$  har kroppen  $K$  en ändlig massa?

8. En rätvinklig parallelepipedisk låda utan lock skall tillverkas av en viss mängd plåt. Hur skall sidlängderna väljas för att volymen skall bli maximal?

Beräkna också denna volym.