KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 13 mars 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1 eller period 3 innevarande läsår. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Betrakta funktionen $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$.
A) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 5)$. **(2)**
B) Avgör om det finns någon punkt på funktionsytan $z = f(x, y)$ i vilken tangentplanet är parallellt med planet $8x + 12y + z = 4$. **(2)**

(2) Låt D vara det område i planet som beskrivs av olikheterna $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2 y \, dxdy.$$

(4)

(3) Kroppen K begränsas av paraboloidytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

(4)

DEL B

(4) Bestäm de högsta och lägsta punkterna (dvs de punkter som har störst respektive minst z-koordinat) på ytan $z = x^3 + y^2$, när (x, y) ligger i området $3x^2 + 2y^2 \leq 4$. **(4)**

(5) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, \, -2y, \, -2)$ genom ytan $\mathbf{r}(s, t) = (3s, \, -2t^2, \, 2s + t + 1), \; 0 \leq s \leq 1, \; -1 \leq t \leq 1$, i den riktning som anges av normalvektorn $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$. **(4)**

(6) Avgör om funktionen $f(x, y, z) = 2 + 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$ har en lokal maxpunkt
A) i origo **(2)**
B) i punkten $(1, 1, 1)$ **(2)**

DEL C

(7) Enligt Coulombs lag ges det elektrostatiska fältet $\mathbf{E}$ kring en enhetsladdning i origo av

$$\mathbf{E} = k\frac{(x,\, y,\, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

där k är en konstant.
A. Visa att fältet är konservativt genom att bestämma en potential. **(2)**
B. Beräkna det arbete kraftfältet $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ uträttar vid förflyttning av en punktladdning q ett varv längs den slutna kurvan $x^2+y^2=1,\ z=1$, medurs sett från origo. **(2)**

(8) Betrakta ekvationen $x^2+2xz+y^3-yz+z^4=4$.
A. Visa att ekvationen i en omgivning av punkten $(1,\,1,\,1)$ implicit definierar en C^1 funktion $z=z(x,y)$. **(1)**
B. I vilken riktning från punkten $(1,\,1)$ växer $z(x,y)$ snabbast? **(3)**

(9) En läskeblaskburk i form av en rät cirkulär cylinder utan lock, med höjd h och radie R, innehåller så mycket vätska att när man lutar burken precis så att vätskan börjar rinna ut så skymmer vätskan exakt halva bottenarean. Beräkna volymen av vätskan i burken. **(4)**