



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-06-04

DEL A

(1) Låt $g(x, y, z) = e^{2-xyz^2}$.

A. Ange en vektor som är ortogonal mot nivåytan $g(x, y, z) = 1$ i punkten $(2, 1, -1)$. (2)

B. Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $g(x, y, z) = 1$ i punkten $(2, 1, -1)$. (2)

Lösning. A. Gradienten är ortogonal mot nivåytan, så vi söker ∇g i punkten $(2, 1, -1)$. Vi deriverar partiellt och får $\partial g/\partial x = -yz^2e^{2-xyz^2}$ och $\partial g/\partial y = -xz^2e^{2-xyz^2}$ och $\partial g/\partial z = -2xyze^{2-xyz^2}$. I punkten $(2, 1, -1)$ får vi

$$\nabla g(2, 1, -1) = (-1, -2, 4),$$

som är den sökta vektorn.

B. Den vektor vi tog fram i uppgift A är ortogonal mot ytan och är därför en normalvektor till tangentplanet. En ekvation för det sökta tangentplanet är därför

$$(-1)(x - 2) + (-2)(y - 1) + 4(z - (-1)) = 0$$

vilket också kan skrivas

$$-x - 2y + 4z + 8 = 0.$$

□

Svar: Svar: A. $(-1, -2, 4)$ B. $-x - 2y + 4z + 8 = 0$

- (2) Låt D vara det område i planet som beskrivs av olikheterna $-x \leq y \leq x$ och $x^2 + y^2 \leq 1$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D y \, dx \, dy.$$

(4)

Lösning. Området vi ska integrera över består av de punkter innanför enhetscirkeln som ligger över linjen $y = -x$ och under linjen $y = x$. Detta område är symmetriskt med avseende på x -axeln och integranden y är en udda funktion så vi ser därför direkt att

$$\iint_D y \, dx \, dy = 0$$

(Obs: detta kan förstås också räknas fram, t ex med hjälp av polära koordinater.) \square

Svar: 0

(3) Ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ ges i området $x > 0, y > 0$ i planet av formlerna

$$P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

A. Bestäm konstanten a så att vektorfältet blir konservativt. (2)

B. Med konstanten a vald som i uppgift A, beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

då γ är det räta linjestycket från punkten $(1, 1)$ till punkten $(5, 4)$. (2)

Lösning. Vi ser att fältet är C^1 i det aktuella området, som är enkelt sammanhängande. Fältet är då konservativt om och endast om $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. Vi deriverar partiellt och får:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{a}{y^2}$$

och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Vi ser att dessa är lika om och endast om $a = 1$. Med detta val av konstanten a är alltså fältet konservativt.

B. Vektorfältet \mathbf{F} , med konstanten a vald till 1, är nu konservativt. Det har då en potential, dvs det finns en funktion U sådan att $\nabla U = \mathbf{F}$. Vi bestämmer en sådan funktion U . Vår U måste uppfylla att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{och} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Om vi integrerar det andra av dessa villkor med avseende på y får vi att

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \frac{x}{y} + g(x)$$

för någon funktion g . Om vi deriverar detta med avseende på x och jämför med det första villkoret ovan får vi kravet att

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y} + g'(x) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$$

vilket är uppfyllt om vi väljer $g(x) = -\ln x$. Vi har alltså en potential:

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \frac{x}{y} - \ln x$$

Kurvintegralen kan nu beräknas med hjälp av potentialen:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(5, 4) - U(1, 1) = \ln \frac{41}{10} - \frac{1}{4}.$$

□

Svar: A. 1. B. $\ln \frac{41}{10} - \frac{1}{4}$.

DEL B

- (4) Betrakta problemet att optimera funktionen $f(x, y) = (1 + 3x + 2y)^2$ för (x, y) som ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.
- A. Hur kan man på förhand veta att problemet har en lösning, dvs att f verkligen har ett största och ett minsta värde för aktuella (x, y) ? (1)
- B. Lös problemet, dvs hitta största och minsta värdet av f på enhetscirkeln! (3)

Lösning. A. Funktionen f är kontinuerlig på enhetscirkeln som är en kompakt mängd. Alltså följer det att funktionen antar ett största och ett minsta värde när (x, y) varierar i mängden.

B. Sätt $g(x, y) = x^2 + y^2$. Vi ska då optimera f under bivillkoret $g = 1$. Eftersom enhetscirkeln ligger i det inre av definitionsmängden till f och både f och g är C^1 så gäller enligt Lagranges sats följande: i en optimal punkt är ∇f parallell med ∇g . Eftersom den senare vektorn är nollskild på mängden $g = 1$ får vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 6(1 + 3x + 2y) = \lambda 2x \\ 4(1 + 3x + 2y) = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De första två ekvationerna ger att antingen är $1 + 3x + 2y = 0$ eller så är $x/3 = y/2$, dvs $y = 2x/3$. Det första fallet ger en punkt där värdet av funktionen f är 0. Det andra fallet ger vid insättning i den tredje ekvationen att $x^2 + (2x/3)^2 = 1$ dvs $x = \pm 3/\sqrt{13}$. Detta ger oss två möjliga optimala punkter, nämligen $\pm(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$. Jämförelse av funktionsvärdena till f i dessa punkter ger att största värdet av f på enhetscirkeln är $f(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}) = (1 + \sqrt{13})^2$ och det minsta värdet är 0. □

Svar: största värdet av f på enhetscirkeln är $f(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}) = (1 + \sqrt{13})^2$ och det minsta värdet är 0.

(5) Beräkna volymen av kroppen K som ges av

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \text{ och } 1 \leq z \leq x + y + 11\}. \quad (4)$$

Lösning. Låt D vara den mängd i xy -planet som ges av olikheten $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$ eller ekvivalent av $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Då ges den sökta volymen V av

$$V = \iint_D (x + y + 11 - 1) \, dx dy = \iint_D (x + y + 10) \, dx dy.$$

Om vi i denna integral inför translaterade polära koordinater, $x = r \cos \varphi$ och $y = 1 + r \sin \varphi$, där r går från 0 till 1 och φ går från 0 till 2π får vi

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r \cos \varphi + 1 + r \sin \varphi + 10)r \, dr \right) d\varphi = 11\pi.$$

□

Svar: 11π

(6) Avgör om det går att byta integrationsordning i den itererade integralen

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy.$$

Beräkna integralen!

(4)

Lösning. Integrationsområdet är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Integranden är kontinuerlig på hela triangeln, inklusive randen. Därför går det att byta integrationsordning. Om vi byter integrationsordning får vi

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{1 - e^{-1}}{2}.$$

□

Svar: $\frac{1 - e^{-1}}{2}$.

DEL C

- (7) Betrakta funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3$ med definitionsmängd D given av olikheten $2x^2 + y^2 \leq 3$. En punkt (x_0, y_0) på randen till området D kallas för en *stationär randpunkt* till f om riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = 0$ för alla riktningar \mathbf{v} som är parallella med randkurvan i (x_0, y_0) .
- A. Avgör om punkten $(1, 1)$ är en stationär randpunkt till f . (2)
- B. Bestäm alla stationära randpunkter till f . (2)

Lösning. Vi har att riktningsderivatan av f i en punkt (x, y) i den normerade riktningen \mathbf{v} är

$$f'_{\mathbf{v}} = (\nabla f) \cdot \mathbf{v} = (2xy, x^2 + 3y^2) \cdot (v_1, v_2) = 2xyv_1 + (x^2 + 3y^2)v_2.$$

I en stationär randpunkt ska detta bli noll för alla riktningar (v_1, v_2) som är parallella med randkurvan. Vilka riktningar är det? Randkurvan ges av $2x^2 + y^2 = 3$. Ta en punkt (x_0, y_0) på randkurvan. En vektor ortogonal mot randkurvan i denna punkt är $(4x_0, 2y_0)$. Alla vektorer som är parallella med randkurvan i punkten ges därför av $k(2y_0, -4x_0)$ för någon konstant k . Vi får alltså följande villkor för att punkten (x_0, y_0) ska vara en stationär randpunkt:

$$2x_0y_0 \cdot 2y_0 + (x_0^2 + 3y_0^2)(-4x_0) = 0$$

där samtidigt $2x_0^2 + y_0^2 = 3$ ska vara uppfyllt. Vi ser att enda lösningen är att $x_0 = 0$ och $y_0 = \pm\sqrt{3}$. Vi har alltså två stationära randpunkter, nämligen $(0, \pm\sqrt{3})$, vilket är svaret på uppgift B. Svaret på A är därmed nej. □

Svar: A. Nej B. $(0, \pm\sqrt{3})$

- (8) En plan strömning parallell med x -axeln i ett standardkoordinatsystem har hastighetsfältet $\mathbf{u}(x, y) = (v_0, 0)$, där v_0 är en konstant. Ett cirkulärt hinder, med medelpunkt i origo och radien R , placeras i strömningen. Detta förändrar hastighetsfältet. När jämvikt inställt sig är strömningen stationär (tidsoberoende) och under vissa antaganden kan man visa att det nya hastighetsfältet \mathbf{v} har potentialen

$$\Phi(x, y) = v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right),$$

dvs $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$.

- A. Bestäm hastighetsfältet $\mathbf{v}(x, y)$ då $x^2 + y^2 > R^2$. (1)
 B. Bestäm hastigheten i de fyra punkterna $(\pm 2R, \pm 2R)$. (1)
 C. Visa att strömlinjerna (kurvor som i varje punkt (x, y) har $\mathbf{v}(x, y)$ som tangent) skär y -axeln under rät vinkel. (1)
 D. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}(x, y)$ och skissa med ledning av detta gränsvärde och uppgift B och C ett par strömlinjer. (1)

Lösning. A. Hastighetsfältet är gradienten av potentialen, dvs

$$\mathbf{v}(x, y) = \nabla \Phi(x, y) = \left(v_0 \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x^2 v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

B. Vi sätter in punkterna i ovanstående uttryck och får

$$\mathbf{v}(\pm 2R, \pm 2R) = v_0 \left(1, \pm \frac{1}{8} \right),$$

med plustecken i andra koordinaten när x och y har olika tecken och minustecken annars.

C. I alla punkter på y -axeln är x -koordinaten 0. Sätter vi in detta i uttrycket för \mathbf{v} får vi

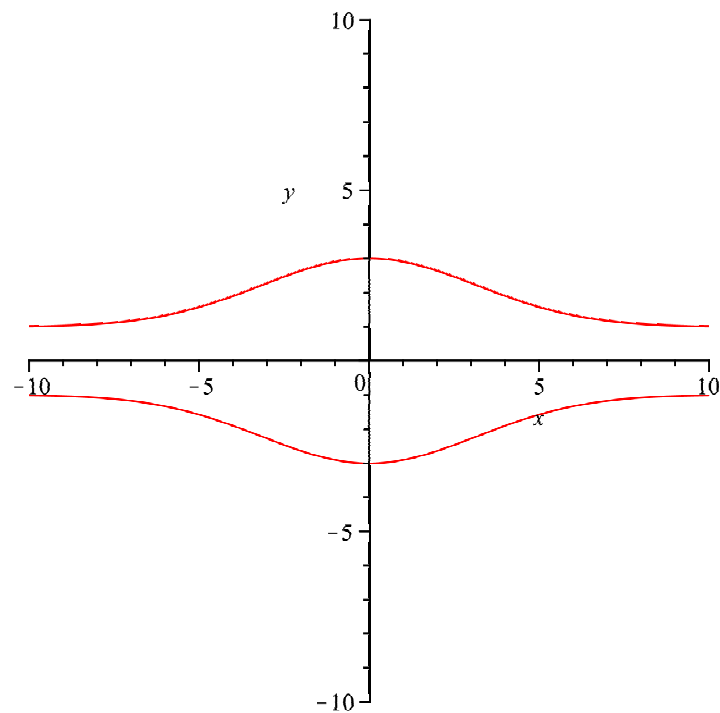
$$\mathbf{v}(0, y) = \left(v_0 \left(1 + \frac{R^2}{y^2} \right), 0 \right),$$

vilket är en vektor parallell med x -axeln, eller med andra ord vinkelrät mot y -axeln.

D. Om vi låter $x \rightarrow \pm\infty$ i uttrycket för \mathbf{v} ovan ser vi att alla rationella uttryck går mot 0 så vi får

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}(x, y) = (v_0, 0).$$

Skiss av några strömlinjer:



□

Svar: A. $\mathbf{v}(x, y) = \left(v_0 \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x^2 v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$.

B. $\mathbf{v}(\pm 2R, \pm 2R) = v_0 \left(1, \pm \frac{1}{8} \right)$ (med + vid olika tecken och - vid lika).

C. -

D. $\lim_{\rightarrow \pm \infty} \mathbf{v}(x, y) = (v_0, 0)$.

- (9) Ett klot med radie r har sin medelpunkt på ytan av ett klot med radie R , där $R > r$. Beräkna volymen av den del av det mindre klotet som befinner sig inuti det större klotet. (4)

Lösning. Vi inför koordinater så att det stora klotet har medelpunkt i origo och det lilla klotet i $(0, 0, R)$. Skärningspunkter mellan klotens begränsningsytor fås då när $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ och $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = r^2$ båda är uppfyllda, dvs då $z = R - r^2/2R$ och $x^2 + y^2 = r^2 - r^4/4R^2$. Den del av det mindre klotet som ligger inuti det större klotet kan nu beskrivas så att $R - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ och $x^2 + y^2 \leq r^2 - r^4/4R^2$. Kalla projektionen av denna mängd på xy -planet för D . Med hjälp av polära koordinater ($x = v \cos \varphi$ och $y = v \sin \varphi$) får vi nu den sökta volymen V som

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - R + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2 - r^4/4R^2}} (\sqrt{R^2 - v^2} - R + \sqrt{r^2 - v^2}) v dv \\ &= 2\pi \left[-\frac{(R^2 - v^2)^{3/2}}{3} - \frac{Rv^2}{2} - \frac{(r^2 - v^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{\sqrt{r^2 - r^4/4R^2}} \\ &= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} + \frac{R^3}{3} - \frac{\left(R^2 - r^2 + \frac{r^4}{4R^2}\right)^{3/2}}{3} - \frac{R\left(r^2 - \frac{r^4}{4R^2}\right)}{2} - \frac{\left(\frac{r^4}{4R^2}\right)^{3/2}}{3} \right], \end{aligned}$$

vilket med viss möda (det gäller att se att uttrycken under rottecknen är jämna kvadrater) kan förenklas till

$$\frac{2\pi r^3}{3} - \frac{\pi r^4}{4R}.$$

(Observera att om $R \rightarrow \infty$ i uttrycket ovan så går den andra termen mot 0 och vi får volymen av ett halvklot, precis som förväntat i det fallet.) \square

Svar: $\frac{2\pi r^3}{3} - \frac{\pi r^4}{4R}.$
