

Lösningförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 11 januari 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.

För betyg E krävs 3 godkända moduler.

Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.

För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.

För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.

För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.

Tentamen är tvådelad.

Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter.

För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.

Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.

För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.

Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Examinator: Hans Tranberg

Del 1

Modul 1.

Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$, $y(0) = 4$.

Undersök $y(x)$ då x växer från startvärdet $x_0 = 0$.

Lösning:

Den erhållna differentialekvationen är separabel. Konstantlösningarna saknar i detta fall intresse.

De stationära lösningarna är $y = \pm 3$.

Med $y^2 - 9 \neq 0$, $y \neq 3$ omformas differentialekvationen till $\frac{1}{y^2 - 9} \frac{dy}{dx} = 1$,

vilken kan skrivas $\frac{1}{(y+3)(y-3)} \frac{dy}{dx} = 1$.

Partialbråksuppdelning ger $\left(\frac{-1}{y+3} + \frac{1}{y-3} \right) \frac{dy}{dx} = 1$.

Integration med avseende på x ger: $-\ln|y+3| + \ln|y-3| = 6x + \ln|C_1|$.

Vi bestämmer y : $\ln \left| \frac{y-3}{y+3} \right| = 6x + \ln|C_1|$, $\frac{y-3}{y+3} = \pm C_1 e^{6x}$, $C = \pm C_1$ ger $\frac{y-3}{y+3} = C e^{6x}$.

$y-3 = (y+3)C e^{6x}$, $y - yC e^{6x} = 3C e^{6x} + 3$, $y = \frac{3C e^{6x} + 3}{1 - C e^{6x}}$.

Villkoret $y(0) = 4$ ger $C = \frac{1}{7}$, vilket insatt i den allmänna lösningen ger

den sökta lösningen $y = \frac{3(e^{6x} + 7)}{7 - e^{6x}}$, $x \neq \frac{\ln 7}{6}$. Existensintervallet ges av $\left\{ x : x < \frac{\ln 7}{6} \right\}$

För startvärdet $x_0 = 0$ är $y = 4$ och derivatan är positiv.

Detta innebär att funktionen växer och y blir obegränsad för $x = \frac{\ln 7}{6}$.

SVAR: $y = \frac{3(e^{6x} + 7)}{7 - e^{6x}}$, $x < \frac{\ln 7}{6}$. y växer obegränsat.

Modul 2.

Positionen för en partikel ges av systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Vidare gäller för 2x2-matrisen \mathbf{A} följande ekvationer: $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.

Avgör även en partikels öde om den vid tiden $t = 2$ befinner sig i punkten (2,2).

Lösning:

För att bestämma den allmänna lösningen behövs två linjärt oberoende lösningar till systemet.

Lösningarna erhålles med hjälp av matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.

Egenvärdena fås vanligtvis ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, men i detta fall har vi ytterligare information rörande matrisen \mathbf{A} . Vi kan direkt ange egenvärden och tillhörande egenvektorer.

Vi omformar de givna ekvationerna.

$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ kan skrivas $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $\lambda_1 = 3$ och en tillhörande

egenvektor är $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En lösning ges av $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$.

$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kan skrivas $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $\lambda_2 = -1$ och en tillhörande egenvektor

är $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. En lösning ges av $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Den allmänna lösningen kan då skrivas som en linjärkombination av \mathbf{X}_1 och \mathbf{X}_2 .

Vi erhåller $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Egenvärdena är reella med skilda tecken.

Det innebär att origo som är den enda stationära punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

Partikeln placerad i punkten (2,2), vilken ej ligger på "den stabila egenvektorn",

Kommer att avlägsna sig obegränsat.

SVAR: Den allmänna lösningen $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat.

Modul 3.

Bestäm $y(t)$ då $y'' - 2y' + 2y = 3\delta(t - \frac{\pi}{2})$, $y(0) = 1$ och $y'(0) = 1$. $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

Lösning:

Vi laplacetransformerar differentialekvationen.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 3e^{-s\frac{\pi}{2}}$$

Insättning av villkoren ger: $(s^2 - 2s + 2)Y(s) = 3e^{-s\frac{\pi}{2}} + s + 1 - 2$.

Lös ut $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{3e^{-\frac{\pi}{2}} + s - 1}{s^2 - 2s + 2} \text{ vilket vi omformar till } Y(s) = \frac{3e^{-\frac{\pi}{2}}}{(s-1)^2 + 1} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}.$$

$$\text{Återtransformering ger: } y(t) = 3U\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{t-\frac{\pi}{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + e^t \cos t$$

$$\text{SVAR: Den sökta lösningen är } y(t) = 3U\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{t-\frac{\pi}{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + e^t \cos t.$$

Del 2

11. Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera periodiskt med tiden t , mätt i månader, enligt följande:

y :s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell

mot produkten av y och den periodiska faktorn $\cos \frac{\pi t}{6}$.

På morgonen den 17 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton och den 17 augusti är $y = 3$ ton.

Bestäm $y(t)$ som funktion av t .

Bestäm även när fiskebeståndet är minst och ange dess minsta värde.

Lösning:

Beståndet, $y(t)$, uppfyller differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky \cos \frac{\pi t}{6}$, där k är en proportionalitetskonstant.

Den erhållna differentialekvationen är separabel. Konstantlösningen saknar i detta fall intresse.

Omformning ger: $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = k \cos \frac{\pi t}{6}$. Integration med avseende på t ger: $\ln|y| = k \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi t}{6} + A$.

$$\text{Lös ut } y: y = \pm e^A e^{k \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi t}{6}} = C e^{k_0 \sin \frac{\pi t}{6}}.$$

$$\text{Vi bestämmer nu konstanterna med hjälp av villkoren } \begin{cases} 1 = y(0) = C \\ 3 = y(3) = C e^{k_0 \sin \frac{\pi \cdot 3}{6}} \end{cases} \begin{cases} C = 1 \\ e^{k_0} = 3, \quad k_0 = \ln 3 \end{cases}.$$

$$\text{Beståndet ges av } y(t) = e^{\ln 3 \sin \frac{\pi t}{6}} = 3^{\sin \frac{\pi t}{6}}.$$

Det minsta värdet, $y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, erhålles då $\sin \frac{\pi t}{6} = -1$, $t = 9 + 12n$, $n \in \mathbb{N}$.

SVAR: Beståndet uppfyller differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky \cos \frac{\pi t}{6}$ och är $y(t) = 3^{\sin \frac{\pi t}{6}}$.

Beståndet är minst den 17 februari varje år och är lika med $\frac{1}{3}$ ton.

12. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \leq x \leq L$?

b. Undersök om följderna $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots\}$ är ortogonal på intervallet $0 \leq x \leq \pi$.

c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?

d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

Lösning:

a. Två funktioner, f och g , är ortogonala på intervallet $[0, L]$ då $\int_0^L f(x)g(x)dx = 0$.

b. Vi undersöker om $\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0$ med $n \neq m$.

$$V.L. = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx$$

$$V.L. = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(n-m)} \sin(n-m)x - \frac{1}{(n+m)} \sin(n+m)x \right]_0^{\pi} = 0 = H.L.$$

c. Den reellvärda funktionen f är periodisk med perioden T då $f(x+T) = f(x)$ för alla x .

d. Koefficienterna b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ är fourierkoefficienterna för den udda funktion, som på intervallet $0 < x < \pi$ ges av $f(x) = \cos 2x$.

Koefficienterna ges av $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx \, dx$.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{\sin(nx+2x) + \sin(nx-2x)\} dx = \{n \neq 2\} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2} \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{1 - \cos(n+2)\pi}{n+2} + \frac{1 - \cos(n-2)\pi}{n-2} \right] \right\} = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2} \right] \right\} = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi} \frac{2n}{n^2 - 4}$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ är jämnt } \neq 2. \\ \frac{4n}{\pi(n^2 - 4)}, & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

$$\text{Vidare gäller } b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{\sin(4x)\} dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos 4x}{4} \right]_0^{\pi} = 0$$

Anmärkning: En annan lösningsvariant på uppgift d är att först multiplicera $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ med $\sin mx$ och därefter integrera över intervallet $0 < x < \pi$ och utnyttja ortogonaliteten hos följden $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots\}$.

SVAR: a. Se ovan. b. Funktionsföljden är ortogonal. c. Se ovan.
d. Koefficienterna

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ är jämnt.} \\ \frac{4n}{\pi(n^2 - 4)}, & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

13. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a, b) .

Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a, b) .

Vidare är y_1 och y_2 lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a, b) .

Visa Abels formel $W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$.

$W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2 .

Lösning:

y_1 och y_2 uppfyller differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, vilket innebär att vi får

$$\text{följande system: } \begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

Wronskianen av y_1 och y_2 ges av $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Vi omformar systemet så att Wronskianen uppkommer i detta system.

Multiplitera den första ekvationen med y_2 och den andra ekvationen med y_1 samt bilda differensen av mellan de nya ekvationerna.

$$\begin{cases} (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)y_2 = 0 \\ (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)y_1 = 0 \end{cases} \quad -y_1''y_2 + y_2''y_1 + p(x)(-y_1'y_2 + y_2'y_1) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\{y_2'y_1 - y_1'y_2\} + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0, \quad \frac{d}{dx}W(x) + p(x)W(x) = 0.$$

Vi har erhållit en differentialekvation i Wronskianen $W(x)$.

Differentialekvationen är separabel $\frac{1}{W(x)} \frac{dW(x)}{dx} = -p(x)$.

Integrera från x_0 till x : $\int_{x_0}^x \frac{1}{W(x)} \frac{dW(x)}{dx} dx = \int_{x_0}^x -p(x) dx$, $\ln|W(x)| - \ln|W(x_0)| = \int_{x_0}^x -p(x) dx$

$$W(x) = \pm W(x_0) e^{\int_{x_0}^x -p(x) dx}$$

För x lika med x_0 är $W(x)$ lika med $W(x_0)$ vilket ger $W(x_0) = \pm W(x_0)$.

Vi har fått $W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$. VSV.

SVAR: Se ovan.

14. Bestäm den generaliserade integralen $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^t \cos 2u \cdot (t-u)^2 \cdot e^{-3t} du \right\} dt$.

Lösning:

Integralen kan omformas till följande dubbelintegral: $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ e^{-3t} \int_{u=0}^t \cos 2u \cdot (t-u)^2 du \right\} dt$.

Den inre integralen är en faltningintegral.

Den sökta integralen är Laplacetransformen för faltningen med $s = 3$ insatt.

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ e^{-st} \int_{u=0}^t \cos 2u \cdot (t-u)^2 du \right\} dt = L\{\cos 2t\} \cdot L\{t^2\} = \frac{s}{s^2 + 4} \cdot \frac{2}{s^3}.$$

Insättning av $s = 3$ ger den sökta integralen.

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^t \cos 2u \cdot (t-u)^2 \cdot e^{-3t} du \right\} dt = \frac{1}{3^2 + 4} \cdot \frac{2}{3^2} = \frac{2}{117}.$$

SVAR: Dubbelintegralen är lika med $\frac{2}{117}$.

15. Bestäm alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + 1) \\ \dot{y} = -x(x^2 + 1) \end{cases}$.

Klassificera om möjligt de stationära punkternas karaktär med avseende på stabilitet/instabilitet och typ (nod, spiral, centrum).

Bestäm även lösningskurvorna och speciellt den lösning som går genom punkten $(x, y) = (3, 4)$.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma de stationära lösningarna.
De erhålles då hastighetsvektorn är lika med nollvektorn.

Vi får följande system:
$$\begin{cases} 0 = y(x^2 + 1) \\ 0 = -x(x^2 + 1) \end{cases}.$$

Den enda stationära lösningen är origo, dvs $(x,y) = (0,0)$

För att undersöka dess karaktär linjariserar vi det icke-linjära systemet med hjälp av Jacobimatrisen.

Jacobimatrisen blir
$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y2x & x^2 + 1 \\ -3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen i $(x,y) = (0,0)$ ger en konstant matris vars egenvärden vi bestämmer.

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
 Egenvärden fås ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{J}(0,0) - \lambda \mathbf{I})$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ detta ger de imaginära lösningarna $\lambda = \pm i$.

I det linjariserade systemet är $(x,y) = (0,0)$ ett centrum.

Dock ger det ingen information rörande det icke linjära systemet.

Vi övergår till att använda fasplanemetoden.

Det ursprungliga systemet omformas enligt följande:
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x(x^2 + 1)}{y(x^2 + 1)} = \frac{-x}{y}.$$

Vi har erhållit en första ordningens differentialekvation.

Omformning ger $2yy' + 2x = 0$. Integrera med avseende på x : $x^2 + y^2 = C$.

Lösningen genom punkten $(x,y) = (3,4)$ är $x^2 + y^2 = 25$.

Således är den stationära lösningen ett centrum.

SVAR: Den stationära lösningen är $(x,y) = (0,0)$. Den sökta lösningskurvan är $x^2 + y^2 = 25$.

Den stationära lösningen $(x,y) = (0,0)$ är ett centrum.