Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I och SF1637 Differentialekvationer och transformer III.

Lördagen den 4 februari 2012, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

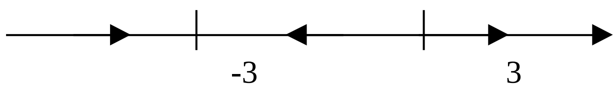
Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>

Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = y^2 - 9$ samt ange om de är stabila eller instabila. Bestäm de startvärden $y_0 = y(0)$ för vilka $\lim_{t\to\infty} y(t)$ är ändligt.

<u>Lösning:</u>

För de stationära lösningarna gäller att $\frac{dy}{dt} = 0$. Det ger lösningarna $y_1 = 3$ och $y_2 = -3$.
En teckenstudie av derivatan ger information rörande stabiliteten.
För $y < -3$ och $y > 3$ är derivatan positiv och $y(t)$ är växande.
För $-3 < y < 3$ är derivatan negativ och $y(t)$ är avtagande.
Vi ritar upp faslinjen.



Den stationära lösningen $y_1 = 3$ är instabil och
den stationära lösningen $y_2 = -3$ är asymptotiskt stabil.
$\lim_{t\to\infty} y(t)$ är ändligt för startvärden $y_0 = y(0) \le 3$.
För $y_0 = y(0) < 3$ är $\lim_{t\to\infty} y(t) = -3$ och för $y_0 = y(0) = 3$ är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 3$.

SVAR: De stationära lösningarna är $y_1 = 3$ och $y_2 = -3$.
$y_1 = 3$ är instabil och $y_2 = -3$ är asymptotiskt stabil.
$\lim_{t\to\infty} y(t)$ är ändligt för startvärden $y_0 = y(0) \le 3$.

Modul 2.

Bestäm först den allmänna lösningen till det homogena systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$ och bestäm

därefter den allmänna lösningen till det inhomogena systemet $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi bestämmer egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Vi får $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$.

Nu bestämmer vi tillhörande egenvektorer vilka erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$

$\underline{\lambda_1 = 1}$ ger $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$ och $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\underline{\lambda_2 = 2}$ ger $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$ och $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna homogena lösningen är $\mathbf{X}_h = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen fås av $\mathbf{X}_p = \Phi\int \Phi^{-1}\mathbf{F}dt$.

Här är Φ en fundamentalmatris och i vårt fall är $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$.

Inversen $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{-e^{3t}}\begin{pmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Insättning ger en partikulärlösning $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}dt$

$\int \begin{pmatrix} -e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}dt = \int \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t + 2e^t \\ te^t + e^t \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen till det inhomogena systemet ges av $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$.

Vi får $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t + 2e^t \\ te^t + e^t \end{pmatrix}$ eller $\mathbf{X} = c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ te^t \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen till det homogena systemet är

$\mathbf{X}_h = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen till det inhomogena systemet är $\mathbf{X} = c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ te^t \end{pmatrix}$.

Modul 3.
Bestäm fourierserien för funktionen som är π-periodisk och
definieras av $f(t) = \cos^2 t$ för $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Lösning:
Den givna funktionen är en jämn funktion och dess fourierserie är på formen

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{\pi/2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt$$

Här är fourierkoefficienterna $a_0 = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos 2nt \cos^2 t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos 2nt(1+\cos 2t)\,dt = \frac{2}{\pi}(0 + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

SVAR: Funktionen $f(t) = \cos^2 t$ tilldelas fourierserien $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.

Anmärkning: Fourierserien kan skrivas upp direkt. $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.

Del 2
11. En partikel rör sig längs en x-axel så att dess hastighet i axelns riktning är proportionell mot kvadraten på x-koordinaten $x(t)$.
Proportionalitetskonstanten antas vara 1 (dimension $m^{-1}s^{-1}$ om längd och tid mäts i m respektive s).
Vid tiden $t = 0$ har partikeln koordinaten $p \neq 0$.
a) Bestäm $x(t)$ för $t \geq 0$.
b) Undersök om partikeln för lämpliga val av p kan nå origo eller försvinna obegränsat bort från origo inom ändlig tid. Ange i så fall hur lång tid, som funktion av p, detta tar .

Lösning:
a) Vi ställer först upp differentialekvationen.
Hastigheten $\frac{dx}{dt} = kx^2$, där k är proportionalitetskonstanten. I detta fall är $k = 1$.
Vår differentialekvation är då $\frac{dx}{dt} = x^2$, vilken är separabel och även autonom.
Konstantlösningen $x = 0$ innebär att partikeln förblir i origo hela tiden.
Partikeln befinner sig inte i origo vid tiden noll.
Med $x \neq 0$ omformas differentialekvationen till $\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = 1$. Integrera med avseende på t.
Vi får $-\frac{1}{x} = t + C$. Vilkoret ger oss konstanten $C = -\frac{1}{p}$.
Insättning och förenkling ger: $-\frac{1}{x} = t - \frac{1}{p}$, $-\frac{1}{x} = \frac{tp-1}{p}$, $x = \frac{p}{1-tp}$.
b) Partikeln kan ej nå origo inom ändlig tid
Däremot kan den försvinna obegränsat bort från origo inom ändlig tid.
Partikeln försvinner obegränsat långt bort inom $\frac{1}{p}$ sekunder för $p > 0$.

SVAR: a) $x = \frac{p}{1-tp}$. b) Partikeln försvinner obegränsat långt bort inom $\frac{1}{p}$ sekunder för $p > 0$.

12. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

a) Visa att Wronskianen , $W(y_1, y_2)$, till y_1 och y_2 satisfierar $a_2(x)\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$.

b) Härled därefter Abels formel $W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$, där C är en konstant.

c) Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,\ -1 < x < 1$.
Bestäm $W(y_1, y_2)$.

d) Vad krävs för att y_1 och y_2 skall bilda en bas för lösningsrummet till den homogena differentialekvationen ?

<u>Lösning:</u>

a) Wronskianen $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$.

Insättning i vänstra ledet av ekvationen ger $\text{VL} = a_2(x)(y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'') + a_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1')$.

Vi omformar så att den givna differentialekvatonen, $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, kan användas.

$\text{VL} = a_2(x)(y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'') + a_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1')$

$\text{VL} = y_1(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2') - y_2(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1')$

Vi adderar och subtraherar $y_1a_0(x)y_2$.

$\text{VL} = y_1(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) - y_2(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1)$

Men y_1 och y_2 är två lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Vi får då $\text{VL} = y_1 0 - y_2 0 = 0 = \text{HL}$.

b) Differentialekvationen $a_2(x)\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$ är linjär (Även separabel.)

Vi bestämmer en integrerande faktor. Först omformas differentialekvationen:

$\dfrac{dW}{dx} + \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0 \quad , a_2(x) \neq 0$.

En integrerande faktor är $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$. Multiplicera $\dfrac{dW}{dx} + \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0$ med $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$.

Vi erhåller $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\dfrac{dW}{dx} + e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0$ vilket kan skrivas $\dfrac{d}{dx}\left\{ We^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} \right\} = 0$.

Integrera med avseende på x: $We^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} = C$ vilket ger Abels formel $W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$.

c) Nu tillämpar vi Abels formel.

Vi bestämmer först $a_2(x)$ och $a_1(x)$. $a_2(x) = 1 - x^2$ och $a_1(x) = -2x$.

Den sökta Wronskianen $W(y_1, y_2) = Ce^{-\int \frac{-2x}{1-x^2}dx} = Ce^{-\ln(1-x^2)} = \dfrac{C}{1-x^2}$ med $C \neq 0$.

d) För att bilda en bas för lösningsrummet skall y_1 och y_2 vara linjärt oberoende.
Detta inträffar då Wronskianen är skilt ifrån noll.

SVAR: a) och b) se ovan. c) $W(y_1, y_2) = \dfrac{C}{1-x^2}$, $C \neq 0$.

d) y_1 och y_2 skall vara linjärt oberoende dvs Wronskianen är skilt ifrån noll.

13. Låt $y = y_1(x)$ vara en lösning till den homogena differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$. Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$. Bestäm därefter en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + 2xy = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \end{cases}$, $y(0) = 2$.

<u>Lösning:</u>
För att erhålla en partikulärlösning ansätter vi en partikulärlösning ges av $y_p = y_1(x)u(x)$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger: $y_1'u + y_1u' + Py_1u = f$.
Omformning av differentialekvationen ger: $(y_1' + Py_1)u + y_1u' = f$.
Nu utnyttjar vi att $y = y_1(x)$ är en lösning till den homogena differentialekvationen dvs $y_1' + Py_1 = 0$.
Då är $y_1u' = f$, $u' = \dfrac{f}{y_1}$, $u(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$. En partikulärlösning är $y_p = y_1(x)\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$. vsv

Nu över till begynnelsevärdesproblemet $y' + 2xy = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \end{cases}$, $y(0) = 2$.

Först bestämmer vi en lösning till den homogena differentialekvationen $y' + 2xy = 0$.
Denna är separabel och vi söker icke-triviala lösningar.
Omformning ger: $\dfrac{y'}{y} = -2x$, $\ln|y| = -x^2 + \ln|C_1|$, $y_h = C_2e^{-x^2}$.

Med beteckningar enligt ovan erhåller vi $y_1(x) = e^{-x^2}$ och $e^{-x^2}u'(x) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \end{cases}$.

Lös ut $u'(x)$: $u'(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \end{cases}$. Integrera map x: $u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2} + C_3, & 0 \le x < 1 \\ C_4, & 1 \le x \end{cases}$.

Observera att här bestämmer vi först allmänna lösningen för att sedan bestämma integrationskonstanterna.

Den allmänna lösningen är $y = e^{-x^2}u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + C_3e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ C_4e^{-x^2}, & 1 \le x \end{cases}$.

Begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger $2 = \dfrac{1}{2} + C_3$, $C_3 = \dfrac{3}{2}$, $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ C_4e^{-x^2}, & 1 \le x \end{cases}$.

Nu återstår det att bestämma konstanten C_4 och då behövs det ytterligare ett villkor. Vid en första anblick verkar det som om ett sådant saknas, men vi skall bestämma en kontinuerlig lösning. Det enda x-värde för vilket funktionen skulle kunna vara diskontinuerlig är för $x = 1$. Således kräver vi att vänster- och högergränsvärdet är lika där.

Vi erhåller: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}e^{-1} = C_4e^{-1}$, $C_4 = \dfrac{e+3}{2}$, $y = \begin{cases} \dfrac{1 + 3e^{-x^2}}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{e+3}{2}e^{-x^2}, & 1 \le x \end{cases}$.

SVAR: En partikulärlösning är $y_p = y_1(x)\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$.

En kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet är $y = \begin{cases} \dfrac{1+3e^{-x^2}}{2} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{e+3}{2}e^{-x^2} & , \quad 1 \le x \end{cases}$.

14. Betrakta en smal stav, av längden $\dfrac{\pi}{2}$. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ ^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Detta ger upphov till följande problem: $\begin{cases} u'_t = u''_{xx} \quad , \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \quad , t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u'_x(\dfrac{\pi}{2},t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x \quad , \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.
<u>Lösning:</u>
Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$.
Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda$.
Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.
Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.
Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.
Dessa är följande: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \in R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R}$
$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$	$X''(x) = 0$	$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor:
$X(0)T(t) = 0,\ X'(\dfrac{\pi}{2})T(t) = 0,\ t > 0$.
Dessa skall gälla för alla $t > 0$.
Detta ger: $X(0) = 0,\ X'(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.
Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X'(x)$.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \in R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R}$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$
$X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$	$X'(x) = A_2$	$X'(x) = \mu(-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

Insättning av villkoren ger.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \in R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R}$
$X(0) = A_1 + B_1 = 0$	$X(0) = B_2 = 0$	$X(0) = A_3 = 0$
$X'(\dfrac{\pi}{2}) = \mu(A_1 e^{\mu\frac{\pi}{2}} - B_1 e^{-\mu\frac{\pi}{2}}) = 0$	$X'(\dfrac{\pi}{2}) = A_2 = 0$	$X'(\dfrac{\pi}{2}) = \mu(-A_3 \sin \mu \dfrac{\pi}{2} + B_3 \cos \mu \dfrac{\pi}{2}) = 0$

$$\begin{cases} B_1 = -A_1 \\ \mu A_1 (e^{\mu\frac{\pi}{2}} + e^{-\mu\frac{\pi}{2}}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_3 = 0 \\ \mu B_3 \cos\mu\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$.
Då erhålles $\mu = 2n+1\ ,\ n \in N$ och lösningen har formen $X(x) = B_3 \sin(2n+1)x$.
Motsvarande t-ekvation har lösningen $T(t) = C_3 e^{\lambda t} = C_3 e^{-(2n+1)^2 t}$.
Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen $u_n(x,t) = X(x)T(t) = B_3 C_3 \sin(2n+1)x\ e^{-(2n+1)^2 t}$.
Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.

Vi erhåller $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$.

Det återstår att bestämma koefficienterna.
Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Insättning ger: $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.
Vi får $b_1 = 2$ och $b_3 = 5$. Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 5e^{-49t}\sin 7x$.
SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 5e^{-49t}\sin 7x$.

15. Skriv den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' + x = x^3$ som ett plant autonomt system. Klassificera om möjligt systemets kritiska punkter med avseende på stabilitet och typ.

<u>Lösning:</u>

Vi inför en ny variabel y genom att sätta $y = x'$.

Vårt system blir då: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = x^3 - x \end{cases}$ eller på matrisform $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^3 - x \end{pmatrix} = \mathbf{f}$.

Vi bestämmer först de kritiska punkterna för vilka tangentvektorn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ är lika med nollvektorn.

$\begin{pmatrix} y \\ x^3 - x \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ ger följande kritiska punkter $(0,0)$, $(1,0)$ och $(-1,0)$.

För att bestämma de kritiska punkternas karaktär betraktar vi det linjariserade systemet.
Matrisen i det linjariserade systemet är lika med Jacobimatrisen i punkten.

Vi bestämmer först Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Insättning i Jacobimatrisen av respektive kritiska punkt ger:

<u>$(0,0)$</u>

$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm i$. För det linjariserade systemet är den kritiska punkten en centerpunkt, men ingen slutsats kan dras angående det icke-linjära systemet. Den kritiska punkten kan vara en stabil spiral, instabil spiral eller en center.
För att undersöka karaktären hos den kritiska punkten har vi fasplanemetoden till förfogande.

Vi bildar då $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{x^3 - x}{y}$ vilken är separabel. Omformning ger: $2y\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - 2x$.

Integrera med avseende på x: $y^2 = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + C_1 = \frac{\left(x^2-1\right)^2}{2} + C_2$.

Om $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$, där $0 < x_0 < 1$, så är $C_2 = -\frac{\left(x_0^2-1\right)^2}{2}$.

Den lösning som uppfyller villkoret $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$ ges av

$$y^2 = \frac{\left(x^2-1\right)^2}{2} - \frac{\left(x_0^2-1\right)^2}{2} = \frac{\left(2-x^2-x_0^2\right)\left(x_0^2-x^2\right)}{2} .$$

Observera att $y = 0$ för $x = \pm x_0$. Vi erhåller $y = \pm\sqrt{\frac{\left(2-x^2-x_0^2\right)\left(x_0^2-x^2\right)}{2}}$, där $-x_0 < x < x_0$.

Den lösning $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ som uppfyller villkoret $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$ är periodisk och den kritiska punkten, $(0, 0)$ är en center och därmed stabil.

<u>(1,0)</u>

$\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

För det linjariserade systemet är den kritiska punkten en sadelpunkt, ty egenvärdena är reella och har olika tecken.

Även för det icke-linjära systemet är den kritiska punkten en sadelpunkt och därmed instabil.

<u>(−1,0)</u>

$\mathbf{J}(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

För det linjariserade systemet är den kritiska punkten en sadelpunkt,
ty egenvärdena är reella och har olika tecken.
Även för det icke-linjära systemet är den kritiska punkten en sadelpunkt och därmed instabil.

SVAR: Det plana autonoma systemet kan skrivas som $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^3 - x \end{pmatrix}$.

Systemets kritiska punkter är $(0, 0)$, $(1,0)$ och $(-1,0)$.
$(0, 0)$ är center och stabil. $(1,0)$ och $(-1,0)$ är sadelpunkter och därmed instabila.