Institutionen för matematik.
KTH

LÖSNINGAR till tentamen i Matematik I, 5B1115, 5B1135, 5B1104, 5B1106, repetitionskurs,

fredagen den 18/6 2004 kl. 8.00 - 13.00.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}+\ln x}{3x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{2x^2+1})/x+\ln x/x}{3+e^{-x}/x} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+1/x^2}+\ln x/x}{3+e^{-x}/x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2}+0}{3+0} = \underline{\dfrac{\sqrt{2}}{3}},$

eftersom $1/x^2, \ln x/x$ och $e^{-x}/x \to 0$ då $x \to \infty$.

2. Implicit derivering av $2x^2+3xy+y^2=6$ ger:
$4x+3y+3xy'+2yy'=0$.
Insättning av punktens koordinater, $(x,y)=(1,1)$, ger:
$4+3+3y'+2y'=0, \quad 7+5y'=0, \quad y'=-7/5$ i punkten.
Normalen till kurvan i punkten har alltså lutningen $k=-1/(-7/5)=5/7$
varför normalens ekvation blir $y-1=(5/7)(x-1)$ eller $\underline{y=5x/7+2/7}$.

3. $f(x)=\arctan(3\sqrt{x})-\arctan\sqrt{x}, \quad x\geq 0,$
$f'(x)=\dfrac{3/(2\sqrt{x})}{1+9x}-\dfrac{1/(2\sqrt{x})}{1+x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{3(1+x)-(1+9x)}{(1+x)(1+9x)}=$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2-6x}{(1+x)(1+9x)}=0$, för $x=1/3$.

Man finner att $f'(x)>0$, dvs $f(x)$ är växande då $0<x<1/3$ och $f'(x)<0$, dvs $f(x)$ är avtagande, då $x>1/3$.

Därför är ändpunkten $x=0, f(0)=0$ ett lokalt minimum och den stationära punkten $x=1/3, f(1/3)=\arctan(\sqrt{3})-\arctan(1/\sqrt{3})=\pi/3-\pi/6=\pi/6$ ett lokalt maximum.

4. Bestäm den lösningen till differentialekvationen
$y'' + 2y' + 10y = 0$ som uppfyller $y(0) = 1, \; y'(0) = -2$.

Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 10 = 0$ har nollställena $r = -1 \pm 3i$.
Alltså, allmänna lösningen $y = y_H = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$.
Derivering ger
$y' = e^{-x}(-A\cos 3x - B\sin 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$.
Insättning ger
$y(0) = A = 1. \quad y'(0) = -A + 3B = -1 + 3B = -2, \; B = -1/3$.
Detta ger den sökta lösningen
$\underline{y = e^{-x}(\cos 3x - (1/3)\sin 3x)}$.

5. $V = \pi \int_0^2 y^2(x)\, dx = \pi \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \pi \int_0^2 \frac{dx}{(x+2)(x+3)} =$
$[$ Handpåläggning eller identifiering $] = \pi \int_0^2 (\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3})\, dx =$
$\pi \Big[\ln|x+2| - \ln|x+3| \Big]_0^2 = \pi\big(\ln 4 - \ln 5 - (\ln 2 - \ln 3)\big) = \pi \ln\left(\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2}\right) =$
$\underline{\pi \ln \frac{6}{5}}$.

6A.
$P(n): \quad 3 \cdot 7^n + 6 = 9k$, för något helt tal k.(skall visas för $n = 0, 1, 2, ...$).
Bevis:
1. $\quad P(0): \quad 3 \cdot 7^0 + 6 = 3 + 6 = 9 \cdot 1$. Stämmer.

2. Antag $P(m): \quad 3 \cdot 7^m + 6 = 9k$, dvs $\quad 7^m = 3k - 2$.
$P(m+1): \quad 3 \cdot 7^{m+1} + 6 = 9k_1$ ska visas.
VL i $P(m+1) = 3 \cdot 7^{m+1} + 6 = 3 \cdot 7 \cdot 7^m + 6 =$[enligt antagandet]
$= 21(3k-2) + 6 = 63k - 42 + 6 = 63k - 36 = 9(7k-4) = 9k_1$, VSV.
Därför gäller $P(n)$ för alla hela tal $n = 0, 1, 2, ...$, enligt induktionsprincipen.

6B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3 + n + 1}$ $\underline{\text{konvergerar}}$ eftersom (för $n \geq 2$)
$0 \leq \frac{n-2}{n^3 + n + 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent.