Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 6A till kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 den 23/11 2006, 13.15-13.35.

Namn: OLOF HEDEN

Resultat: G

Lösningen räknas som godkänd om det mesta är rätt. Godkänd uppgift ger 1 bounspoäng vid tentamensskrivning på kursen. Detta gäller ordinarie tentamenstillfället och tentamensskrivningar fram till augusti 2007.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problem

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Den karakteristiska ekvationen

$$0 = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda - 11$$

har rötterna 11 respektive -1, som alltså är matrisens egenvärden. När vi söker egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 11$ skall vi lösa systemet

$$\begin{pmatrix} 5-11 & 6 \\ 6 & 5-11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som ju har lösningsmängden

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen är *symmetrisk* är egenvektorer hörande till skilda egenvärden ortogonala. I R^2 beskriver $(1, -1)$ den enda ortogonala riktningen mot $(1, 1)$. Vi har alltså

Svar: Egenvärden $\lambda = 11$ och $\lambda = -1$ med tillhörande egenvektorer

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp} \quad t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$