

Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Onsdagen den 25 augusti 2004, kl 14.00-19.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 28, 42 och 54 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

.....

1. Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = ye^{x-z}$ i punkten $(0, 1, 2)$ i riktningen av vektorn $(3, 0, 1)$. I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(0, 1, 2)$ och vad är riktningsderivatans största möjliga värde? (4p)

2. Lös ekvationen $z^2 - iz - 2 - 6i = 0$. (4p)

3. Bestäm de partiella derivatorna D_1f och D_2f då $f(x, y) = g(x^2 - y, y^2 - x)$ och g är en funktion med kontinuerliga partiella derivator av första ordningen. (4p)

4. Beräkna arean av det område D i planet som bestäms av olikheterna $x \leq y \leq 5x$ och $0 \leq y \leq 6 - x^2$. (4p)

5. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Visa att matrisen A är diagonaliserbar och att $(1, 0, -1)$ och $(0, 1, 0)$ är två egenvektorer av A . (3p)

a) Bestäm en matris P så att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris. (3p)

6. a) Bestäm de områden i planet där integralen

$$I = \int_C \frac{-y \, dx + 2x \, dy}{y^3}$$

är oberoende av vägen C .

b) Beräkna I när C är parabelbågen $y = 5 - x^2$ från punkten $(2, 1)$ till punkten $(1, 4)$. (5p)

7. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ där K är kroppen som begränsas av konerna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$. (6p)

v.g. vänd

8. Matrisen till en linjär avbildning $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ är $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ m.a. på standard-

baserna.

a) Bestäm bilden av en godtycklig vektor (x, y) , dvs. bestäm $F(x, y)$.

b) Är F surjektiv? (6p)

9. Bestäm arean av ett område S på ytan $z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ när projektionen av S i xy -planet är en triangel med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. (6p)

10. Bestäm det största resp. det minsta värde som funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$ antar på kurvan $|x| + |y| = 1$ och de punkter i vilka f antar dessa värden. (6p)

11. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xy)$. Ytan S består av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ och av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$ och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S . (7p)

12. Vi betraktar den slutna kurvan $x^2 + x^4 + y^2 = 1$ i planet.

a) Bestäm de punkter på kurvan i vilka kurvans normal är parallel med x -axeln.

b) Bestäm de punkter på kurvan som är närmast origo. (8p)
