Lösningar till tentamen den 25 augusti 2004
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Gradienten av f är $\text{grad} f(x, y, z) = (ye^{x-z}, e^{x-z}, -ye^{x-z})$ och $\text{grad} f(0, 1, 2) = (e^{-2}, e^{-2}, -e^{-2})$. För $u = \frac{(3,0,1)}{\sqrt{10}}$ är riktningsderivatan $D_u f(0, 1, 2) = e^{-2}(1, 1, -1) \cdot u = \frac{2}{e^2\sqrt{10}}$. Riktningsderivatan är störst i riktningen $(1, 1, -1)$ och det största värdet är $\sqrt{3}e^{-2}$.

2. Ekvationen kan skrivas $(z - \frac{i}{2})^2 = \frac{7}{4} + 6i$ genom kvadratkomplettering. Låt $z - \frac{i}{2} = a + bi$. Då är $(a + bi)^2 = \frac{7}{4} + 6i$ dvs. $a^2 - b^2 = \frac{7}{4}$ och $2ab = 6$. Om $b = \frac{3}{a}$ ger den första ekvationen $a^2 - (\frac{3}{a})^2 - \frac{7}{4} = 0$ dvs. $a^4 - \frac{7}{4}a^2 - 9 = 0$. Vi får att $a^2 = 4$ som medför $a = \pm 2$, $b = \frac{3}{2} = \pm\frac{3}{a}$. Alltså $z - \frac{i}{2} = \pm(2 + \frac{3i}{2})$. Svar: $\underline{z = 2 + 2i}$ och $\underline{z = -2 - i}$.

3. Låt $G(x, y) = (x^2 - y, y^2 - x)$. Dess Jacobimatris är $\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$. Eftersom $f = g \circ G$ får vi enligt kedjeregeln $D_1 f(x, y) = 2xD_1 g(p) - D_2 g(p)$ och $D_2 f(x, y) = -D_1 g(p) + 2yD_2 g(p)$ där $p = (x^2 - y, y^2 - x)$.

4. Vi delar D i två delar: $D_1 = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 5x$, $D_2 = \{(x, y) : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le 6 - x^2\}$. Areorna är

$$\iint_{D_1} dx\, dy = \int_0^1 (\int_x^{5x} dy))dx = \int_0^1 4x dx = 2$$

$$\iint_{D_2} dx\, dy = \int_1^2 (\int_x^{6-x^2} dy)dx = \int_1^2 (6 - x^2 - x)dx = [6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2}]_1^2 = \frac{13}{6}.$$

Svar: Arean av D är $\underline{\frac{25}{6}}$.

5. a) Beräkning visar att $Av = -3v$ där $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Från ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ får vi alla egenvärden. Vi får ekvationen $(3 - \lambda)(-3 - \lambda)(2 - \lambda) - 30(-3 - \lambda) = 0$ dvs. $(-3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 24) = 0$. Egenvärden är 8 och -3. Matrisen är diagonaliserbar eftersom det finns en bas av tre egenvektorer.
b) Vi löser ekvationssystemet $(A - 8I)X = 0$ där koefficientmatrisen är $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -11 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Lösningen är $X = t\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, där $t \in \mathbf{R}$. Matrisen $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ uppfyller villkoret $P^{-1}AP = D$ med diagonalmatrisen $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

6. a) Vektorfältet $F(x,y) = (-\frac{1}{y^2}, \frac{2x}{y^3})$ är definierad om $y \neq 0$. Det har potentialfunktion $\phi(x,y) = -\frac{x}{y^2}$ för $y > 0$ och för $y < 0$ för att $D_1\phi(x,y) = -\frac{1}{y^2}$ och $D_2\phi(x,y) = \frac{2x}{y^3}$. Integralen I är således oberoende av vägen i övre halvplanet $\{(x,y) : y > 0\}$ och i nedre halvplanet $\{(x,y) : y < 0\}$.
b) Parabelbågen ligger i området $\{(x,y) : y > 0\}$. Integralen $I = \phi(1,4) - \phi(2,1) = \underline{\frac{31}{16}}$.

7. Ytornas skärningskurva är cirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$. Projektionen av K i xy-planet är D: $x^2 + y^2 \leq 4$. Vi får

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_D \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}(4 - 2\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} (r^2(4-2r)\,d\theta\Big)\,dr$$

$$= 2\pi\Big[\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^4\Big]_0^2 = \underline{\frac{16\pi}{3}}$$

8. a) $F(x,y) = (x-y, 3x+2y, x+y)$.
b) Avbildningen F är surjektiv, om varje vektor (u,v,w) i $\mathbb{R}^3$ är $= F(x,y)$ för någon vektor (x,y) i planet. Till exempel vektorn $(0,1,1)$ kan inte skrivas på sådan form för att ekvationen $(0,1,1) = (x-y, 3x+2y, x+y)$ har ingen lösning. F är inte surjektiv.

9. De partiella derivatorna av $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ är $D_1f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}$ och $D_2f(x,y) = y^{\frac{1}{2}}$. Vi får att $dS = \sqrt{1+x+y}\,dxdy$. Arean$= \iint_S dS = \iint_T \sqrt{1+x+y}\,dxdy$ där T är den givna triangeln. Vidare är arean

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} (1+x+y)^{\frac{1}{2}}\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 \Big[\frac{2}{3}(1+x+y)^{\frac{3}{2}}\Big]_{y=0}^{y=1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{3}{2}})\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\Big[2\sqrt{2}x - \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{15}(10\sqrt{2} - 2(2^{\frac{5}{2}} - 1)) = \underline{\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)}.$$

10. Kurvan $|x| + |y| = 1$ är en kvadrat med hörn i punkterna $(\pm1, 0), (0, \pm1)$. På kvadraten är $f(x,y) = x^2 - (1-|x|)^2 = 2|x| - 1$. Låt $g(x) = 2|x| - 1$. Eftersom $0 \leq |x| \leq 1$, så är $-1 \leq g(x) \leq 1$. Det största resp. det minsta värdet av g när $|x| \leq 1$ är 1 resp. -1, $g(\pm1) = 1$ och $g(0) = -1$. Svar: Det största resp. det minsta värdet av f i kvadraten är $f(\pm1, 0) = 1$ resp. $f(0, \pm1) = -1$.

11. Enligt Gauss' sats är $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\,dx\,dy\,dz$ där K är halvbollen $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$. Divergensen av $\mathbf{F}$ är $= y + z$. Eftersom integralen

$\iiint_K y\,dx\,dy\,dz = 0$ pga. symmetrin får vi med hjälp av sfäriska kordinater

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1(\int_0^{2\pi}\rho\cos\phi\,\rho^2\sin\phi\,d\theta)\,d\rho)\,d\phi$$
$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi\sin\phi\int_0^1\rho^3\,d\rho)d\phi = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\phi\,d\phi = \frac{\pi}{8}[-\cos 2\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

12. a) Låt $g(x,y) = x^4 + x^2 + y^2 - 1$. Gradientvektorn grad$g(x,y) = (4x^3 + 2x, 2y) \neq (0,0)$ på kurvan $g(x,y) = 0$. Gradienten är parallell med vektorn $(1,0)$ precis då $y = 0$. Vi får från kurvans ekvation $x^4 + x^2 - 1 = 0$ och vidare $x^2 = \frac{(\pm)\sqrt{5}-1}{2}$. Svar: Normalen är parallell med x- axeln i punkterna $(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, 0)$.
b) Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$, dvs kvadrat av avståndet mellan punkten (x,y) och origo. På kurvan är $f(x,y) = 1 - x^4$. Från a) följer att x-koordinaten i kurvans punkter är på intervallet $[-c,c]$ där $c = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,(< 1)$. Funktionen f är minst om $x = \pm c$. Samma punkter som i a) är närmast origo.