

Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

**Tentamensskrivning för Repetitionskursen på
Kompletteringskurs i matematik 5B1114**

Onsdagen den 25 augusti 2004, kl 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Del 1 motsvarar de sex kursmodulerna. Minst två poäng ger godkänt på en modul.

Del 2 är för högre betyg. De preliminära gränserna är:

för betyget fyra minst 14 poäng från Del 2 och att Del 1 är godkänt,

för betyget fem minst 22 poäng från Del 2 och att Del 1 är godkänt.

.....

Del 1

1. Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och att $(1, 0, -1)$ och $(0, 1, 0)$ är två egenvektorer av A . (3p)

2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \cos \frac{x}{y}$ i punkten $(\pi, 2)$. (3p)

3. Bestäm de partiella derivatorna $D_1 f$ och $D_2 f$ då $f(x, y) = g(x^2 - y, y^2 - x)$ och g är en funktion med kontinuerliga partiella derivator av första ordningen. (3p)

4. Sök alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = x^2 - 2xy + x^4$ och karakterisera en av dem. (3p)

5. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ där K är kroppen som begränsas av konerna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$. (3p)

6. a) Bestäm de områden i planet där integralen

$$I = \int_C \frac{-y \, dx + 2x \, dy}{y^3}$$

är oberoende av vägen C .

b) Beräkna I när C är parabelbågen $y = 5 - x^2$ från punkten $(2, 1)$ till punkten $(1, 4)$.

(3p)

v.g. vänd

Del 2

1. Bestäm arean av ett område S på ytan $z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ när projektionen av S i xy -planet är en triangel med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. (6p)

2. Bestäm det största resp. det minsta värde som funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$ antar på kurvan $|x| + |y| = 1$ och de punkter i vilka f antar dessa värden. (6p)

3. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xy)$. Ytan S består av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ och av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$ och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S . (7p)

4. Vi betraktar den slutna kurvan $x^2 + x^4 + y^2 = 1$ i planet.

a) Bestäm de punkter på kurvan i vilka kurvans normal är parallel med x -axeln.

b) Bestäm de punkter på kurvan som är närmast origo. (8p)

Lösningar till tentamen den 25 augusti 2004
Repetitionskurs 5B1114

Del 1

1. Beräkning visar att $Av = -3v$ där $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Från ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ får vi alla egenvärden. Vi får ekvationen $(3 - \lambda)(-3 - \lambda)(2 - \lambda) - 30(-3 - \lambda) = 0$ dvs. $(-3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 24) = 0$. Egenvärden är 8 och -3 . Matrisen är diagonaliserbar eftersom det finns en bas av tre egenvektorer.

2. De partiella derivatorna av funktionen $f(x, y) = \cos \frac{x}{y}$ är $D_1 f(x, y) = -\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}$ och $D_2 f(x, y) = \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y}$. I punkten $(\pi, 2)$ är $D_1 f(\pi, 2) = -\frac{1}{2}$, $D_2 f(\pi, 2) = \frac{\pi}{4}$ och $f(\pi, 2) = 0$. Vektorn $(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}, -1)$ är en normal till planet. Tangentplanets ekvation är

$$-\frac{1}{2}(x - \pi) + \frac{\pi}{4}(y - 2) - z = 0 \text{ dvs. } \underline{2x - \pi y + 4z = 0}.$$

3. Låt $G(x, y) = (x^2 - y, y^2 - x)$. Dess Jacobimatrix är $\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$. Eftersom $f = g \circ G$ får vi enligt kedjeregeln $D_1 f(x, y) = 2x D_1 g(p) - D_2 g(p)$ och $D_2 f(x, y) = -D_1 g(p) + 2y D_2 g(p)$ där $p = (x^2 - y, y^2 - x)$.

4. Vi söker punkter som uppfyller $D_1 f(x, y) = 2x - 2y = 0$ och $D_2 f(x, y) = -2x + 4y^3 = 0$. Då är $y = x$. Den andra ekvationen ger $-2x + 4x^3 = -2x(1 - 2x^2) = 0$. Vi får tre kritiska punkter: $(0, 0)$ och $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Vidare är $AC - B^2 = D_{11}f D_{22}f - (D_{12}f)^2 = 2 \cdot 12y^2 - (-2)^2 = 24y^2 - 4$. I punkten $(0, 0)$ är $AC - B^2 = -4$. Punkten är en sadelpunkt. (De två andra kritiska punkterna är minimumpunkter.)

5. Ytornas skärningskurva är cirkeln $x^2 + y^2 = 4, z = 2$. Projektionen av K i xy -planet är $D: x^2 + y^2 \leq 4$. Vi får

$$\begin{aligned} \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{4 - \sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \right) dx \, dy = \\ \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (r^2(4 - 2r) \, d\theta) \, dr \right. \\ &= 2\pi \left[\frac{4}{3} r^3 - \frac{1}{2} r^4 \right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{16\pi}{3}}} \end{aligned}$$

6. a) Vektorfältet $F(x, y) = (-\frac{1}{y^2}, \frac{2x}{y^3})$ är definierad om $y \neq 0$. Det har potentialfunktion $\phi(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ för $y > 0$ och för $y < 0$ för att $D_1 \phi(x, y) = -\frac{1}{y^2}$ och $D_2 \phi(x, y) = \frac{2x}{y^3}$.

Integralen I är således oberoende av vägen i övre halvplanet $\{(x, y) : y > 0\}$ och i nedre halvplanet $\{(x, y) : y < 0\}$.

b) Parabelbågen ligger i området $\{(x, y) : y > 0\}$. Integralen $I = \phi(1, 4) - \phi(2, 1) = \underline{\underline{\frac{31}{16}}}$.

Del 2

Se lösningar till ordinarie omtentamen talen 9-12.