# Uppgift 2.53 (LGA)



**Uppgift.** Visa att om
$$\begin{cases} \bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} & (1) \\ \bar{u} = \bar{w} \times \bar{v} & (2) \end{cases}$$
så är $\bar{u} = \bar{w} = \bar{0}$.

**Lösning.** Uppgiften ger en ekvation för $\bar{u}$ och $\bar{v}$:
$$\bar{u} = (\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{v} \qquad (3)$$
Om $\bar{u} = 0$ är enligt (2) också $\bar{w} = \bar{0}$ och vi är klara. Vi kan därför anta $\bar{u} \neq \bar{0}$ och skall visa att detta leder till en motsägelse. Division med $|\bar{u}|$ ger med $\hat{u} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ ekvationen
$$\hat{u} = (\hat{u} \times \bar{v}) \times \bar{v} \qquad (3')$$
som är ekvivalent med (3) med $|\bar{u}| = 1$

Vi kan nu välja ett ortogonalt koordinatsystem $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ med $\bar{e}_1 = \hat{u}$ och $\bar{e}_2$ i planet som spänns upp av $\hat{u}$ och $\bar{v}$. $\bar{v}$ är då
$$\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$$
och $\bar{u} \times v$ beräknas enligt
$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = y\bar{e}_3$$

Vi får också

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y^2 \bar{e}_1 + xy\,\bar{e}_2$$

Men detta kan aldrig vara lika med

$\bar{u} = \bar{e}_1 = (1,0,0)$ och vi får en

motsägelse