

**FÖRSLAG TILL LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNING I 5B1116,
MATEMATIK II FÖR K1 OCH BIO1, 2005-03-10**

1. Den givna funktionsytan kan skrivas om på formen

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + x^3 y^3 - z = 0.$$

Tangentplanets ekvation i punkten (x_0, y_0, z_0) är

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

och gradienten är

$$\nabla f = (2x + 3x^2 y^3, -2y + 3x^3 y^2, -1).$$

Gradienten i den givna punkten $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 5)$ är då $\nabla f(1, 2, 5) = (26, 8, -1)$ och tangentplanet blir $26(x - 1) + 8(y - 2) + (-1) \cdot (z - 5) = 0$. Detta kan förenklas till $z = 26x + 8y - 37$, vilket är det sökta planet.

Svar. Planet är $z = 26x + 8y - 37$.

2. Det plan som går genom punkterna $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ har ekvationen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Detta är lätt att inse direkt eller kan härledas genom att bestämma koefficienterna i planets ekvation på formen

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

genom metoden med obestämda koefficienter. I vårt fall får vi

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1,$$

och planets normalvektor är $\mathbf{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ vars längd är

$$|\mathbf{n}| = (1 + 2^{-2} + 3^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} (36 + 9 + 4)^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{6}.$$

Avståndet d ges av projektionen av någon av de givna vektorerna på normalvektorn. Om vi väljer $(1, 0, 0)$ fås

$$d = \frac{(1, 0, 0) \cdot (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7}.$$

Svar. Avståndet är $\frac{6}{7}$.

3. Vi får

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen blir

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

eller efter förenkling $\lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0$. Vi får rötterna

$$\lambda_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - 25} = \frac{15}{2} \pm \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Matrisnormen är

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}}.$$

Man kan visa att detta uttryck kan förenklas till $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$.

4. Maximum och minimum antas ty den givna funktionen $f(x, y) = x - y$ är en kontinuerlig funktion definierad på en kompakt (= sluten och begränsad) mängd. Inför Lagrange-funktionen

$$L(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(4x^2 + 6y^2 - 15)$$

och låt $g(x, y) = 4x^2 + 6y^2 - 15$. Det finns två möjligheter:

- 1) Extremvärden antas i punkter som uppfyller $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ och bivillkoret $g(x, y) = 0$. $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ ger emellertid $(8x, 12y) = (0, 0)$ vilket medför $(x, y) = (0, 0)$ som ej uppfyller bivillkoret.
- 2) Extremvärdena antas i stationära punkter för Lagrangefunktionen, vilket ger

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 8\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + 12\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 4x^2 + 6y^2 - 15 = 0. \end{cases}$$

Vi får $x = -\frac{1}{8\lambda}$ och $y = \frac{1}{12\lambda}$. Insättning i bivillkoret ger

$$\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{24} \right] = 15.$$

Efter förenkling får vi $\lambda^2 = 1/144$, vilket ger $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{12}$. För $\lambda_1 = \frac{1}{12}$ får vi $(x, y) = (-\frac{3}{2}, 1)$ med funktionsvärde $f(-\frac{3}{2}, 1) = -\frac{5}{2}$ och för $\lambda_2 = -\frac{1}{12}$ får vi $(x, y) = (\frac{3}{2}, -1)$ med funktionsvärde $f(\frac{3}{2}, -1) = \frac{5}{2}$. Dessa två punkter är kandidater till maximum och minimum.

Svar. Maximum är $\frac{5}{2}$ och minimum är $-\frac{5}{2}$.

5. Vi får successivt genom Gausselimination:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \\ \leftarrow \\ \end{array} \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{2} \textcircled{-} \\ \end{array} \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 9 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{-3} \\ \end{array} \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right).
 \end{array}$$

6. Vi får $u'_x = 1$, $u'_y = 0$, $v'_x = 2x$ och $v'_y = 1$. Således är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x.$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1.$$

Insättning i ekvationen ger

$$f'_x - 2xf'_y = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Svar. Differentialekvationen övergår i ekvationen $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$.

7. Möjliga extrempunkter är kritiska punkter i det inre av kvadraten eller randpunkter.

1) Kritiska punkter i det inre ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $y = x^2$ och vi får insatt i den andra ekvationen $x^4 = x$ som har de reella lösningarna $x = 0$ och $x = 1$. Då $x = 0$ är $y = 0$ och punkten $(x, y) = (0, 0)$ ligger på randen. Analogt fås att $x = 1$ som ger $(x, y) = (1, 1)$ som ligger i det inre av kvadraten och funktionsvärdet är där $f(1, 1) = -1$.

- 2) På $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$ ges funktionen av $g(x) = f(x, 0) = x^3$ och den växer monotont från $g(0) = f(0, 0) = 0$ till $g(2) = f(2, 0) = 8$. På linjen $y = 2$, $0 \leq x \leq 2$ ges funktionen av $h(x) = x^3 + 8 - 6x$. Teckenstudium av derivatan $h'(x) = 3x^2 - 6$ ger att denna funktion avtar från $h(0) = g(0, 2) = 8$ till $h(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, 2) = 8 - 4\sqrt{2}$ och växer sedan till $h(2) = f(2, 2) = 4$.

Eftersom $f(x, y) = f(y, x)$ (symmetriskäl!) behöver vi inte undersöka sidorna av kvadraten där $x = 0$ och $x = 2$. Kandidater till max och min är $f(1, 1) = -1$, $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 8$, $f(2, 0) = 8$ och $f(\sqrt{2}, 2) = f(2, \sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$ och $f(2, 2) = 4$ och maximum är tydligen 8 och minimum -1 .

Svar. Maximum är 8 och minimum är -1 .

8. Den karakteristiska ekvationen för matrisen till den kvadratiske formen är

$$\begin{vmatrix} 19 - \lambda & 3 \\ 3 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Vilket ger ekvationen $\lambda^2 - 30\lambda + 200 = 0$, som har lösningar $\lambda_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 - 200} = 15 \pm 5$. En egenvektor som svarar mot $\lambda_1 = 20$ är $\mathbf{u}_1 = (3, 1)$ och en egenvektor svarande mot $\lambda_2 = 10$ är $\mathbf{u}_2 = (1, -3)$. Motsvarande normerade egenvektorer är $\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$ och $\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$. Låt koordinaterna i basen $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\}$ vara (ξ, η) . Då blir matrisen som hör till den kvadratiske formen i vänsterledet en diagonalmatris Δ där

$$\Delta = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

och ekvationen övergår i $20\xi^2 + 10\eta^2 = 40$, som kan skrivas

$$\frac{\xi^2}{2} + \frac{\eta^2}{4} = 1,$$

så ekvationen betyder en ellips med halvaxlar $\sqrt{2}$ och 2. Motsvarande huvudaxelriktningar är $(3, 1)$ respektive $(1, -3)$.

9. Planetets normalvektor är $(1, -2, 1)$ och den normaliserade normalvektorn är

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1).$$

Vi väljer också en ON-bas i planet. Man kan välja en första vektor godtyckligt till exempel $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. En vektor ortogonal mot $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är kryssprodukten $(1, -2, 1) \times (1, 0, -1) = (2, 2, 2)$. En normaliserad tredje basvektor kan nu väljas som

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Basbytet ges därför av $\mathbf{f} = \mathbf{e}S$ där

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Matrisen för den sökta avbildningen i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen i den ursprungliga basen $\mathbf{e}$ ges nu av $A_e = SA_fS^{-1} = SA_fS^T$ eftersom S är en ON-bas. Uträkning ger

$$A_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

10. a) Vi utnyttjar att determinanten är multiplikativ, dvs. att för två kvadratiska $n \times n$ -matriser gäller $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ och att om den kvadratiska matrisen A är inverterbar gäller

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Detta ger nu

$$\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1}) \cdot \det A \cdot \det S = \frac{1}{\det S} \cdot \det A \cdot \det S = \det A,$$

och vi har bevisat resultatet a).

- b) Skriv

$$S^{-1}AS - \lambda I = S^{-1}AS - S^{-1}\lambda IS = S^{-1}(A - \lambda I)S.$$

Samma räkning som i a) ger nu att

$$\det(S^{-1}AS - \lambda I) = \frac{1}{\det S} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det S = \det(A - \lambda I)$$

och resultatet i b) är bevisat.