

1. Lös följande ekvationssystem simultant:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 4x + 2y + z = 9 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 12 \end{cases}.$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2 \end{cases}.$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{d. } \begin{cases} 2x + z + 2w = 1 \\ 3x + 2y + 2z + w = 2 \\ 4x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + 2z + w = 0 \\ 4x + 4y + 3z = 0 \end{cases}.$$

2. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$ skall ha någon lösning?

Svar:

1.
 - a. $x = 1, y = 2, z = 1$ och $x = 2, y = 1, z = 2$
 - b. $x = 1 - t, y = t - 1, z = t$ och ingen lösning.
 - c. ingen lösning och $x = 0, y = 0, z = 0$.
 - d. ingen lösning och $x = 2s - 3t, y = s, z = 4t - 4s, w = t$.
2. $a = 3$.

3. Bestäm matrisen $(3\mathbf{A} + 2\mathbf{A}^T)^T$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Bestäm matrisen $(\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B})\mathbf{A}$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Bestäm a, b och c så att $\begin{pmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ b & b & 2b \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
6. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ så att $\left(\mathbf{A} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2\mathbf{A} - \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{A}^T + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Tips: Transponera ledvis någon ekvation.

8. Lös matrisekvationen $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^T$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. Bestäm alla 2×2 -matriser $\mathbf{A}$ sådana att $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Svar:

3. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $a = 0, b = 1, c = 0$.
6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
9. Alla matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

10. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. För att visa att $\mathbf{A}$ är inversen till $\mathbf{B}$ räcker det att visa att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

11. Bestäm inverser till följande matriser

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till

matrisen $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

13. Bestäm inverser till matriser $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$ och $\mathbf{A}^2$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ då $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

15. Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A}(2\mathbf{A}^T - 3\mathbf{B})$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

16. Lös matrisekvationen $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\mathbf{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{X}$. Lösningen fås ur $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

Svar:

11. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $a = 2$ och $b = 0$.

$$13. \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 4 \\ -14 & 11 & -5 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$15. \quad \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$16. \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

17. a. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

b. Verifiera att matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

Beräkna $\det(\mathbf{A}^3 \mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-2})$.

18. a. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + y + z + av = 1 \\ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + y + z + 2v = 3 \\ x + y + z + av = 4 \end{cases}$$

skall ha precis en lösning?

b. Bestäm för varje a -värde antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

19. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

20. Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1}$.

21. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ då $(2\mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$. Ledning: Transponera ledvis.

Svar:

17. a. $a \neq 4$.

b. 36.

18. a. $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

b. $a \neq -1$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning, $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning, $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

19. a. 5.

b. 9.

c. 21.

$$20. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$21. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/5 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}.$$