

1. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a & a+2 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} a & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. a. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

b. Verifiera att matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

Beräkna $\det(\mathbf{A}^3 \mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-2})$.

c. Beräkna $\det(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)$ och $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + y + z + av = 1 \\ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + y + z + 2v = 3 \\ x + y + z + av = 4 \end{cases}$$

skall ha precis en lösning?

b. Bestäm för varje a -värde antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Svar:

1. a. 2. b. 1. c. 1. d. 1.

2. a. $a \neq 4$. b. 36. c. 0 resp 29.

3. a. $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

b. $a \neq -1$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning, $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning, $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

Dagens 5/11

4. Punkterna A och B delar sträckan mellan punkterna $(1,4,2)$ och $(4,1,5)$ i tre lika delar. Bestäm A och B .
5. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$ och $(4,0,-1)$ hörn i en parallelogram?
6. Bestäm talet a så att
 - a. vektorerna $\mathbf{u} = (a, 2, a+2)$ och $\mathbf{v} = (a+1, a+3, 6)$ är parallella.
 - b. vektorerna $\mathbf{u} = (a, a, a+2)$ och $\mathbf{v} = (a+1, a+3, a-3)$ är ortogonala.
 - c. vektorerna $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v} = (a, a-1, a)$ bildar vinkel $\pi/4$.
7. Visa att vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är ortogonala om och endast om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har samma längd.

Svar:

4. (2,3,3) och (3,2,4).
 5. Ja.
 6. a. 1. b. -2 eller 1. c. 2.

8. Beräkna projektionen och dess längd av
a. $(5,3,2)$ på $(2,2,1)$. b. $(a,3,-3-2a)$ på $(2,-2,1)$.
9. Kraften $\mathbf{F} = (9,4,5)$ påverkar en kropp belägen i punkten $P = (2,0,0)$. Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten $Q = (3,2,2)$. Hur stor är kraften i vägens riktning?
10. Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komponenter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.
11. Låt $\mathbf{u} = (1,1,2)$ och $\mathbf{v} = (2,1,1)$. Beräkna
a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ b. $\mathbf{v} \times 2\mathbf{u}$
c. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ d. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}$
12. a. Beräkna arean av triangeln ABC då $A = (2,2,1)$, $B = (2,3,2)$ och $C = (6,5,2)$.
b. Ligger punkten $D = (4,5,3)$ i det plan som går genom punkterna A, B, C ?
c*. Ligger D innanför triangel ABC ?

Svar:

8. a. $(4,4,2)$, 6. b. $(-2,2,-1)$, 3.
9. $(3,6,6)$.
10. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.
11. a. $(-1,3,-1)$ b. $(2,-6,2)$ c. $(7,1,-4)$ d. $(-1,3,-1)$
12. a. 3. b. Ja. c. Nej.

13. En parallelepiped har fyra av sina hörn i punkterna $(1,1,2)$, $(2,1,0)$, $(0,1,1)$ och $(1,2,3)$. Beräkna dess volym.
14. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(1,1,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,0,1)$. Beräkna också avståndet från punkten $(6,-1,2)$ till detta plan.
15. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3,1,0)$ och linjen $\mathbf{r}(t) = (1-t, 1+t, 1+t)$.
16. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med planet $x - 2y + z = 1$. Bestäm planets ekvation.
17. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är vinkelrätt mot linjen $\mathbf{r}(t) = (t+1, 1+2t, 2t+1)$. Bestäm planets ekvation.
18. Linjen L går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(2,3,4)$ och är parallell med linjen L . Bestäm de båda linjernas ekvationer.
19. Linjen L går genom punkterna $(1,1,2)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(1,1,5)$ och skär linjen L under rät vinkeln. Bestäm de båda linjernas ekvationer.
20. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med de båda linjerna $\mathbf{r}(t) = (t+1, 1+2t, 2t+1)$ och $\mathbf{p}(t) = (2t+3, 2+t, t+2)$. Bestäm planets ekvation.

Svar:

13. 6.
14. $2x - y + z = 3$, $2\sqrt{6}$.
15. $x - y + 2z = 2$.
16. $x - 2y + z = 3$.
17. $x + 2y + 2z = 10$.
18. $L: (x,y,z) = (1+t, 1+t, t)$. $K: (x,y,z) = (2+t, 3+t, 4+t)$.
19. $L: (x,y,z) = (2-t, 2-t, 1+t)$. $K: (x,y,z) = (t, t, 2t+3)$.
20. $z - y = 2$.