

Dagens 11/11

1. Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan planen $3x + y + 2z = 1$ och $x - 2y + z = 0$.
2. Planet P går genom punkten $(3, 2, 1)$ och är parallell med de båda linjerna $\mathbf{p}(t) = (t, 2t + 1, 1 + t)$ och $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, 1 + t, 2t + 2)$. Bestäm planets ekvation. Beräkna också avståndet mellan planet och den första linjen.
3. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen $\mathbf{r}(t) = (1, t, t + 1)$ och som är vinkelrät med planet $2x + 2y + z = 3$.
4. Punkterna A och B är symmetriska med avseende på planet $2x + y + z = 11$. Bestäm B då $A = (1, 2, 1)$.
5. Ett plan, P , ligger på avståndet 1 från planet $2x + 3y + 6z = 7$. Bestäm P :s ekvation.
6. Punkterna A och B är symmetriska med avseende på linjen $x = 3 + t$, $y = 2 - t$, $z = 2 + t$. Bestäm B då $A = (2, 0, 1)$.
7. Beräkna avståndet mellan linjen $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t, 3 + t, -2t)$ och planet $x - y + z = 4$.

Svar:

1. $\mathbf{r}(t) = (1 - 5t, t, 7t - 1)$.
2. $x - z = 2$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
3. $x - 2y + 2z = 3$.
4. $(5, 4, 3)$.
5. $2x + 3y + 6z = 0$ eller $2x + 3y + 6z = 17$.
6. $(4, 4, 3)$.
7. $2\sqrt{3}$.

8. Två linjära avbildningar T och S , av typen $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, ges enligt följande:
 $T(x,y) = (x+y, x-y)$ och $[S] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm matriserna för avbildningarna $\frac{1}{2}T \circ S$ och $\frac{1}{2}S \circ T$ samt tolka dessa geometriskt.
9. För en linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gäller att $T(2,-1) = (1,3)$ och $T(-1,1) = (1,1)$. Bestäm matrisen $[T]$ för T .
 Tips: Antag att $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Lös ekvationssystemet $[T] \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $[T] \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
10. Låt $T_A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Undersök om $\mathbf{v} = (1,1,0)$ tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$ (dvs undersök om det finns någon vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbf{R}^2$ sådan att $T_A(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$).
 - Undersök om $\mathbf{v} = (1,1,1)$ tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$.
 - Visa att varje punkt (x_1, x_2) avbildas på en punkt (w_1, w_2, w_3) som ligger i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$.
 - Visa att varje punkt i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ är bild av någon punkt i $\mathbf{R}^2$. (c och d tillsammans innebär att hela $\mathbf{R}^2$ avbildas på hela planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ eller, som man säger, planet är bilden av $\mathbf{R}^2$.)
 - Visa att T_A är en-tydigt (dvs visa att om $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ så är $T_A(\mathbf{u}) \neq T_A(\mathbf{v})$. Observera att det räcker att visa att $T_A(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.)
11. Bestäm matrisen för rotationen (i $\mathbf{R}^2$) moturs med vinkel $\pi/3$ enligt följande:
- Rita en figur med hjälp av vilken bestämmer du bilden av vektorn $\mathbf{e}_x$ under denna rotation.
 - Upprepa detta med vektorn $\mathbf{e}_y$.

Svar:

8. $\frac{1}{2}T \circ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ är spegling m.a.p. x -axeln.
 $\frac{1}{2}S \circ T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är spegling m.a.p. linjen $x = y$.
9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
10. a. Ja. b. Nej.
11. $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Man får: a. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

12. En avbildning $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ges av

$$T(x,y,z) = (x + 2y + z, x^k + y + 2z, 2x + 3y + 3z).$$

- Bestäm k så att T blir en linjär avbildning.
För detta k -värde
 - Bestäm standardmatrisen $[T]$.
 - Verifiera att $T(2,1,0) = (4,3,7)$.
 - Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$, sådana att $T(\mathbf{v}) = (4,3,7)$.
 - Ange, som en slutsats av resultatet i d., värdet av $\det([T])$.
 - Finns det någon vektor $\mathbf{v}$ sådan att $T(\mathbf{v}) = (3,7,4)$?
13. Låt $T_A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\mathbf{A}$. Undersök om T_A är inverterbar och om så är fallet bestäm inversen till T_A då

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

14. Undersök om vektorn $(2,1,0,-1)$ tillhör värdemängden av avbildningen $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, där $T(x,y,z) = (2x + y + z, x - y + 2z, y - z, x + 2y + z)$.

15. Undersök sanningshalten i följande påståenden:

För varje linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ och för godtyckliga vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^2$ gäller att

- Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala så är också $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ ortogonala.
 - Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är ortogonala så är heller inte $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ ortogonala.
 - Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är parallella så är heller inte $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ parallella.
 - Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är också $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ parallella.
16. Låt $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkel $\pi/4$. Bestäm bilden av
- punkten $(2,4)$.
 - linjen $y = 2x$.
 - ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$.
 - hyperbeln $9x^2 - y^2 = 1$.
 - parabeln $y = x^2$.

Tips cde: Bestäm den inversa rotationen på formen $(x,y) = T^{-1}(w_1, w_2)$ och substituera $x = \dots$ och $y = \dots$ i den givna ekvationen.

Svar:

12. a. $k = 1$. b. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\mathbf{v} = (2 - 3t, t + 1, t)$.
- e. 0. f. Nej.
13. a. Ej inverterbar.
b. Inverterbar och $T_A^{-1}(x, y, z) = T_A^{-1}(x, y, z) = (z - x, x + y - 2z, x - y + z)$.
14. Tillhör värdemängden.
15. a. Lögn! Om T är projektionen på x -axeln samt $\mathbf{u} = (1, 1)$ och $\mathbf{v} = (1, -1)$, så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala, men $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ inte.
b. Lögn! Om T är projektionen på x -axeln samt $\mathbf{u} = (1, 1)$ och $\mathbf{v} = (0, 1)$, så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte ortogonala, medan $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ är det.
c. Lögn! Exempel i svaret till a visar att $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ kan vara parallella även om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är det.
d. Sant! Antag att $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = (x, y)$. Om $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{u}$ så är $\mathbf{v} = (tx, ty)$ för något tal t . Verifiera att $T(\mathbf{v}) = tT(\mathbf{u})$, dvs $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ är parallella.
16. a. $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. b. $w_2 = -3w_1$.
c. $5w_1^2 + 8w_1w_2 + 5w_2^2 = 1$. d. $4w_1^2 + 10w_1w_2 + 4w_2^2 = 1$.
e. $w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 + \sqrt{2}w_1 - \sqrt{2}w_2 = 0$.

17. a. Visa att vektorn $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\mathbf{v} = (1, 2, 2, 3)$ och $\mathbf{w} = (1, 2, 1, 2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$.)
 b. Är vektorn $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 5)$ en linjär kombination av vektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$?
18. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:
 a. $(1, 3, 2, 2)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$. (Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ om likheten $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)
 b. $(1, 3, 2, -2)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$.
 c. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$.
 d. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 4, 3)$.
 e. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 4, 2)$.
 f. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(3, 4, 3)$.
19. Undersök om vektorerna c.–f. i uppgiften 18 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.
20. För en linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1, 1) = (3, 7)$ och $T(2, 1) = (4, 10)$. Bestäm $T(1, 2)$.
 Tips: Skriv $(1, 2)$ som en linjär kombination av $(1, 1)$ och $(2, 1)$, dvs bestäm a och b så att $(1, 2) = a(1, 1) + b(2, 1)$. Lineariteten av T medför att $T(1, 2) = aT(1, 1) + bT(2, 1)$.
21. För en linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1, 1) = (7, 3)$ och $T(2, 1) = (10, 4)$. Bestäm den vektor (vektorer) $\mathbf{v}$ för vilken $T(\mathbf{v}) = (4, 2)$.
 Tips: Skriv $(4, 2)$ som en linjär kombination av $(7, 3)$ och $(10, 4)$, dvs bestäm a och b så att $(4, 2) = a(7, 3) + b(10, 4)$. Lineariteten av T medför att $T(4, 2) = aT(7, 3) + bT(10, 4)$.
22. Bestäm matrisen $[T]$ för den linjära avbildningen $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ för vilken att $T(\mathbf{e}_x) = (1, 3, 2)$, $T(\mathbf{e}_y) = (1, 2, 1)$ och $T(2, 1, -1) = (2, 7, 4)$.
 Ledning: Skriv $\mathbf{e}_z$ som en linjär kombination av $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $(2, 1, -1)$, dvs bestäm a , b och c så att $\mathbf{e}_z = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c(2, 1, -1)$. Lineariteten av T medför att $T(\mathbf{e}_z) = aT(\mathbf{e}_x) + bT(\mathbf{e}_y) + cT(2, 1, -1)$.

Svar:

17. b. Nej.
18. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende.
 c. linjärt oberoende. d. linjärt beroende.
 e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.
19. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas.
 e. bildar en bas. f. bildar inte en bas.
20. $(5, 11)$.
21. $(0, 1)$.
22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

