Dagens 25/11

1. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 3y^2}.$$

Skissera definitionsmängden, nivålinjerna och grafen till f.

2. Skissera grafen och nivålinjerna till funktionen $f(x,y) = x^2$.

3. Undersök om mängden **M** är öppen, sluten, varken öppen eller sluten då **M** ges i xy–planet av

   a. $y - 2x \le 1,\ x^2 - 3y \le 2,\ 2x + 4y \le 5.$

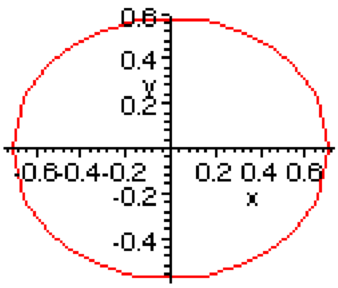
   b. $y - 2x < 1,\ x^2 - 3y \le 2,\ 2x + 4y \le 5.$

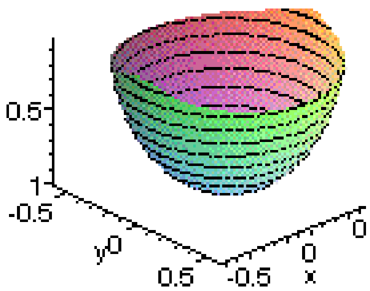
   c. $y - 2x < 1,\ x^2 - 3y < 2,\ 2x + 4y < 5.$

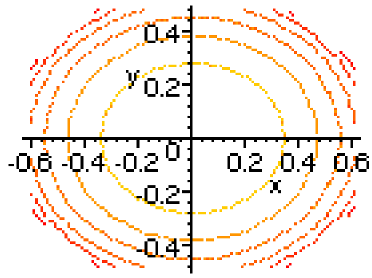
4. Bestäm inre punkter och randpunkter till mängderna i uppgift 3.

Svar:

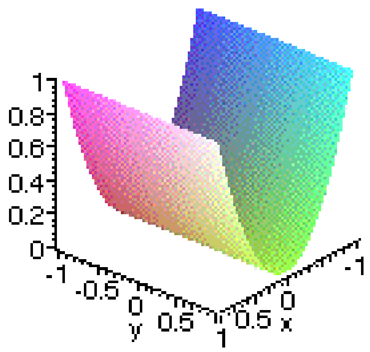
1. Definitionsmängden = alla punkter inom och på ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 1$.
Värdemängden = [0, 1].
Skisser av definitionsmängden, grafen och nivålinjerna:

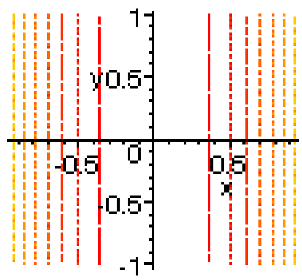






2.





3. a. Sluten. b. Varken sluten eller öppen. c. Öppen.

4. För alla dessa mängder:
Inre punkter = de punkter som samtidigt uppfyller $y - 2x < 1$, $x^2 - 3y < 2$ och $2x + 4y < 5$.
Randpunkterna = de punkter i a. som uppfyller någon av $y - 2x = 1$, $x^2 - 3y = 2$, $2x + 4y = 5$.

Dagens 26/11

5. Beräkna gränsvärdet (eller visa att det inte finns):

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cos y + y^2 \cos x}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: undersök gränsvärdet längs linjer $y = \pm x$.

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: inför polära koordinater.

6. Kan funktionen $f(x,y) = \dfrac{y^2 - xy - 2x^2}{y - 2x}$ definieras i punkterna på linjen $y = 2x$ så att f blir kontinuerlig? Tips: $y^2 - xy - 2x^2 = (y - ?) \cdot (y - ??)$.

7. Beräkna partiella derivator till följande funktioner:

a. $f(x,y) = \dfrac{x - y^2}{1 + xy}$

b. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 y}$

c. $f(x,y,z) = \ln(z^2 + xy)$

8. Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

a. funktionen $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Tips: Sätt $t = y/x$. Vi har då $z = f(t)$ och $z'_x = f'(t) \cdot t'_x = f'(t) \cdot (-y/x^2)$.

b. funktionen $z = f(2x^2 + 3y^2)$ uppfyller ekvationen $3y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

c. funktionen $z = xy\, f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

Svar:

5. a. Finns inte. b. 0.

6. Funktionen f blir kontinuerlig i hela xy–planet om man i varje punkt (x,y) på linjen $y = 2x$ definierar $f(x,y) = x + y$.

7. a. $f'_x = \dfrac{1 + y^3}{(1 + xy)^2}$, $f'_y = -\dfrac{2y + x^2 + xy^2}{(1 + xy)^2}$

b. $f'_x = \dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2 y}}$, $f'_y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1 + x^2 y}}$

c. $f'_x = \dfrac{y}{z^2 + xy}$, $f'_y = \dfrac{x}{z^2 + xy}$, $f'_z = \dfrac{2z}{z^2 + xy}$

Dagens 28/11

8. Beräkna de partiella derivatorna av andra ordningen till följande funktioner:

a. $f(x,y) = xy^2 + \dfrac{y}{x}$ b. $f(x,y) = \arctan \dfrac{1-2xy}{2x+y}$.

9. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

a. $z = x \ln(5x-2y)$ i punkten $(1,2,0)$.

b. $z = \dfrac{8x}{y} - xy + 1$ i punkten $(1,2,3)$.

10. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = 2u + 3v$, $y = 4u - 6v$ får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v, 4u - 6v)$ av variabler u och v. Bestäm $3z'_u - 2z'_v$.

Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2f'_x + 4f'_y$.

11. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = 2u + 3v$, $y = \dfrac{u}{v}$ får vi en ny funktion $z = f\left(2u + 3v, \dfrac{u}{v}\right)$ av variabler u och v. Bestäm $u z'_u + v z'_v$.

Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2f'_x + \dfrac{1}{v} f'_y$.

Svar:

8. a. $f''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$, $f''_{yy} = 2x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 2y - \dfrac{1}{x^2}$.

b. $f''_{xx} = \dfrac{16x}{(4x^2+1)^2}$, $f''_{yy} = \dfrac{2y}{(y^2+1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

9. a. $5x - 2y - z = 1$. b. $2x - 3y - z + 7 = 0$.

10. $24 f'_y$.

11. $x f'_x$

Dagens 29/11

12. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan
    a. $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + xyz = 7$ i punkten $(2,-1,1)$.
    b. $xy^3 + \dfrac{9y}{z} - x^3z^2 = 5$ i punkten $(1,2,3)$.
    c. $\dfrac{z}{x - y^2} + \ln(z - xy) = 3$ i punkten $(2,1,3)$.

13. Beräkna den vinkel som tangenplanet till ytan $2x^3 - x^2y - y^3 - 2z + z^3 = 8$ i punkten $(1,-1,2)$ bildar med xy–planet. Bestäm även tangentplanets ekvation.

14. I vilken punkt är planet $2x + y - 3z = 8$ tangentplan till ellipsoiden $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$

15. Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + xy^2$ i punkten $(1,2)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (3,4)$.

16. Beräkna den mot vektorn $\boldsymbol{v} = (0,-3,4)$ svarande riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = x \arctan \dfrac{y}{z}$ i punkten $(5,2,-1)$.

17. I vilken riktning bör punkten (x,y) röra sig utgående från $(1,2)$ för att värdet av $xy - 5\ln(x + y^2)$ skall växa så snabbt som möjligt?

18. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$ får vi en ny funktion $z = f\left(uv, \dfrac{u}{v}\right)$ av variabler u och v. Bestäm $u\, z'_u + v\, z'_v$.

    Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = v\, f'_x + \dfrac{1}{v}\, f'_y$.

Svar:

12 a. $11x + 8y + 7z = 21$. b. $19x - 15y + 8z = 13$. c. $2x - 2y - z + 1 = 0$.

13. $\arccos \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $4x - 2y + 5z = 16$.

14. $(2,1,-1)$.

15. 26.

16. -1.

17. $(1,-3)$.

18. $2x\, f'_x$.