

I uppgifterna 1–5 förutsätter vi att funktionen f har kontinuerliga derivator av första och andra ordningen.

1. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u + v$ och $y = uv$. Verifiera att
 - a. $u z'_u + v z'_v = x f'_x + 2y f'_y$.
 - b. $z''_{uv} = f''_{xx} + y f''_{yy} + x f''_{xy} + f'_y$.
2. Bestäm z''_{uv} då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = uv$. Svaret får inte innehålla variabler u och v .
3. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = u - v$. Svaret får inte innehålla variabler u och v .
4. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = u^2 - v^2$. Svaret får inte innehålla variabler u och v .
5. En funktion $z(x,y)$ uppfyller ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. Hur förändras denna ekvation om man ersätter funktionen z med funktionen f enligt $z = f(u,v)$, $u = x - y$, $v = x + y$?

Svar:

2. $4y f''_{xx} + y f''_{yy} + 2x f''_{xy} + f'_y$.
3. $4x f''_{xx} + 2f''_{yy} + 4y f''_{xy} + 4f'_x$.
4. $4x f''_{xx} + 4x f''_{yy} + 8y f''_{xy} + 4f'_x$.
5. $f''_{uv} = 0$ (man kan förkorta med 4).

6. Låt $\mathbf{r}(t) = (t \ln t, \sin 2t \cot t)$. Beräkna $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}'(t)$.
7. En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (2t + t^2, t - t^2, 8t)$. Bestäm partikelns hastighet, fart och accelerationen vid tiden $t = 1$.
8. Bestäm $\mathbf{J}_f$, $\frac{d\mathbf{f}}{dx}$, $\frac{d\mathbf{f}}{d(y,z)}$ då $f(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + 2y + 3z)$.
9. Bestäm Jacobimatrisserna till följande funktioner:
 - a. $f(x,y) = (xy, x^2y^3, x + 2y)$
 - b. $f(x,y,z) = (xy + z^2, x^2y^3z^4)$.
10. Beräkna $\mathbf{J}_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}$, $\frac{d\mathbf{f}}{du}$ och $\frac{d\mathbf{f}}{d(u,v)}$ i origo, då $\mathbf{f}: \begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = 3u + 2v \\ z = 4uv + 1 \end{cases}$ och $\mathbf{g}: \begin{cases} r = xy \\ s = yz \\ t = xz \end{cases}$.

Svar:

6. $(0,2)$ och $(1 + \ln t, -2 \sin 2t)$.
7. Hastighet $\mathbf{v} = (4, -1, 8)$. Fart $v = 9$. Acceleration $\mathbf{a} = (2, -2, 0)$.
8. $\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\frac{d\mathbf{f}}{dx} = \begin{pmatrix} yz \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{d\mathbf{f}}{d(y,z)} = \begin{pmatrix} xz & xy \\ 2y & 2z \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
9. a. $\begin{pmatrix} y & x \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$
10. $\mathbf{J}_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. $\frac{d\mathbf{f}}{du} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{d\mathbf{f}}{d(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Visa att ekvationen $x \ln(1 + y^2) + \sin(xy + 1) = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,0)$ precis en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(0) = 0$.
12. Visa att det i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 2$ och sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm för denna funktion:
- $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$
 - $\text{grad } z(1,1)$
 - riktningsderivatan i punkten $(1,1)$ i riktning av vektorn $\mathbf{v} = (2,-6)$.
13. Visa att funktionen $f(x,y) = \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$ är lokalt inverterbar. Beräkna, i punkten $(u,v) = (0,1)$, de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial u}$ och $\frac{\partial y}{\partial v}$ samt inversens Jacobimatrix.
14. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten $(0,1,2)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $y(0) = 1$ och $z(0) = 2$.

Svar:

12. a. $z'_x(1,1) = -5/2$, $z'_y(1,1) = -1$.
b. $\text{grad } z(1,1) = (-5/2, -1)$.
c. 1.
13. $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial v} = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till följande funktioner:

a. $f(x,y) = 2 \ln(x - 2y) + e^{2x - 6y}$ kring punkten $(3,1)$.

b. $f(x,y) = e^x - 1 \cos(x - y)$ kring punkten $(1,1)$.

16. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen

$$f(x,y) = 8\sqrt{x} + 2\cos(2x - y)$$

kring punkten $(1,2)$. Använd detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av $f(1.1, 2.2)$.

17. Visa att ekvationen $z^3 - 2xz + y = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$.

Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till z kring punkten $(1,1)$.

18. Visa att det i en omgivning av punkten $(7,7)$ finns precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $z = z(x,y)$ och $w = w(x,y)$ sådana $z(7,7) = 1$, $w(7,7) = 2$ och

$$\begin{cases} z^2 + 3w = x \\ 3z + w^2 = y \end{cases}$$

Bestäm Taylorpolynomet av första graden till funktionen z kring punkten $(7,7)$. Bestäm ekvationen till tangentplanet till grafen till funktionen z i punkten $(7,7,1)$.

Svar:

15. a. $-1 + 4x - 10y + (x - 3)^2 - 8(x - 3)(y - 1) + 14(y - 1)^2$

b. $x + (x - 1)(y - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)^2$.

16. $p(h,k) = 10 + 4h - 5h^2 + 4hk - k^2$, där $h = x - 1$ och $k = y - 2$; $f(1.1, 2.2) \approx 10,39$.

17. $1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2$.

18. Taylorpolynomet: $8 - 4x + 3y$. Tangentplanet: $z = 8 - 4x + 3y$.