

Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen i Matematik II, 5B1116, för Bio, E, K, ME och
Media, samt 5B1136 för I och OPEN.
tisdagen den 13/4 2004 kl. 8.00 - 13.00.

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

1. Bestäm vinkelräta avståndet från origo till planet $3x + 3y - z = 4$. (3p)
2. Bestäm a så att nedanstående ekvationssystem antingen saknar lösning eller har fler än en lösning.

$$\begin{aligned}3x - y + az &= 5 \\2x + y + 3z &= 1 \\-x + 3y + z &= 2\end{aligned}$$

Avgör också om systemet för detta a -värde har några lösningar samt bestäm i så fall dessa. (3p)

3. Bestäm riktningsderivatan för funktionen $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ i punkten $(1, 2, -2)$ i riktningen $\bar{v} = (2, 3, 6)$. (3p)

4. Bestäm matrisnormen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

dvs. bestäm kvadratroten ur största egenvärdet till matrisen $A^T A$. (3p)

V.g. vänd!

5. Bestäm determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3p)$$

6. Bestäm en tangentvektor $\bar{T}$ till kurvan

$$x = -t \cos \pi t, \quad y = t \sin \pi t, \quad z = t \text{ i punkten } (1, 0, 1).$$

Bestäm också en normalvektor $\bar{n}$ till konen $z^2 = x^2 + y^2$ i samma punkt.

Visa att $\bar{T}$ och $\bar{n}$ är vinkelräta samt förklara detta faktum. (4p)

- 7a. Visa att x och z kan lösas ut som funktioner av y ur det linjära ekvationssystemet

$$2x - 4y + 3z = 1$$

$$3x - 5y + 4z = 2$$

samt visa att $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ är en lösning till systemet. (2p)

- b. Avgör om x och z kan lösas ut som funktioner av y i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ ur det olinjära ekvationssystemet

$$2x - 4y + 3z^2 = 1$$

$$3x - 5y + 4z = 2. \quad (2p)$$

8. Beräkna största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 2e^{xy-y^2} \quad \text{i området } 0 \leq y \leq x \leq 4. \quad (4p)$$

9. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som projicerar punkter (x, y, z) vinkelrätt på planet $x + 2y - z = 0$. (4p)

10. Man vet att symmetriska matriser har enbart reella egenvärden.

a. Visa att $A = B^T B$ är symmetrisk där B är en godtycklig matris. (1p)

b. Låt matrisen A vara av typ $B^T B$. Visa att A :s egenvärden alla är ≥ 0 .

Ledning: För alla vektorer $\bar{u}$ gäller att $|\bar{u}|^2 = \bar{u}^T \bar{u} \geq 0$. (3p)