

Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik 2, 5B1116,
för Bio, E, K, ME och Media samt 5B1136 för I och OPEN den
16/8 2004.

1. Ortsvektorn för den punkt som ligger närmast origo skall vara vinkelrät mot linjens riktningsvektor.

Alltså, $\bar{r} = (1, 0, 2) + t(2, 2, 1) = (1 + 2t, 2t, 1 + t)$ skall vara vinkelrät mot $\bar{v} = (2, 2, 1)$ vilket ger $\bar{r} \cdot \bar{v} = (1 + 2t, 2t, 1 + t) \cdot (2, 2, 1) = 2 + 4t + 4t + 1 + t = 3 + 9t = 0$.

$t = -1/3$ ger alltså närmaste punkten.

$$|\bar{r}_{min}| = |(1/3, -2/3, 2/3)| = \frac{1}{3}\sqrt{(1+4+4)} = 1.$$

2. Ellipsoiden definieras av ekvationen $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 15 = 0$. En normalvektor till ellipsoidens tangentplan i punkten $(-2, -1, 1)$ ges av $\text{grad}f(-2, -1, 1)$.

$$\text{grad}f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = (4x, 6y, 8z).$$

$$\text{grad}f(-2, -1, 1) = (-8, -6, 8). \text{ Välj normalvektorn } \bar{n} = (-4, -3, 4).$$

Tangentplanets ekvation i punkten $\bar{a} = (-2, -1, 1)$ är alltså

$$\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{a}) = 0 \text{ dvs } (-4, -3, 4) \cdot ((x, y, z) - (-2, -1, 1)) =$$

$$(-4, -3, 4) \cdot (x + 2, y + 1, z - 1) = -4x - 8 - 3y - 3 + 4z - 4 = 0 \text{ eller :}$$

$$\underline{-4x - 3y + 4z = 15}.$$

3. Den kvadratiske formen $2x^2 - 2\sqrt{2}y + 3y^2$ kan skrivas $\bar{x}^T Q \bar{x}$, där

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Q :s egenvärden:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25 - 16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

vilket betyder att kurvan $2x^2 - 2\sqrt{2}y + 3y^2 = 3$ kan skrivas

$4\xi^2 + \eta^2 = 3$, vilket är en ellips eftersom båda egenvärdena är positiva.

4. Bestäm A:s invers med Gauss-Jordans metod:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. Sätt $F(x, y, z) = x + 2y + e^z$, $G(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + e^{2z}$.

Enligt Implicita funktionssatsen gäller att om

$$\left| \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}(0, 0, 0) \right| \neq 0 \text{ så definierar ekvationssystemet}$$

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 1 \\ G(x, y, z) = 1 \end{cases} \quad x \text{ och } z \text{ som funktioner av } y \text{ i en omgivning av punkten } (0, 0, 0)$$

Notera att $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ uppfyller både $F = 1$ och $G = 1$.

Man får

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{pmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^z \\ 2x & 2e^{2z} \end{pmatrix} \quad \text{och}$$

$$\left| \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}(0, 0, 0) \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Alltså definierar ekvationerna funktioner $x(y)$ och $z(y)$ enligt ovanstående.

6. Om $u = 2x - 3y$, $v = 3x + 2y$ så gäller

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{och}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -3 \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Vidare derivering ger:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial^2 u} + 12\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial^2 v}, \quad \text{och}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$9\frac{\partial^2 z}{\partial^2 u} - 12\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial^2 v}.$$

Därav erhålles: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \underline{13\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 13\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}$

Anm: De blandade derivatorna $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ och $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ antas här vara lika.

7. Punkterna $(0, 3)$, $(1, 1)$ och $(2, 0)$ skall anpassas till en kurva av typ $ax + bf(x) = y$ där funktionen f uppfyller $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$.
Man får:

$$\begin{array}{l} 0 + 4b = 3 \\ a + 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalekvationerna blir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{eller}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Lösning med Cramers regel ger (Det = $5 \cdot 21 - 4 \cdot 4 = 105 - 16 = 89$).

$$a = \frac{1}{89} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 14 & 21 \end{vmatrix} = \frac{21 - 56}{89} = \underline{\underline{\frac{-35}{89}}}, \quad b = \frac{1}{89} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = \frac{70 - 4}{89} = \underline{\underline{\frac{66}{89}}}$$

8. Problemet innebär att funktionen $V = 8xyz$ (= volymen) skall maximeras under bivillkoret $g = x^2 + y^2 + 2z^2 - 6 = 0$. Vi antar att punkten (x, y, z) är den av ellipsoidens hörn som ligger i första oktanten, dvs uppfyller $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Lådans kanter har alltså längderna $2x, 2y$ eller $2z$. (Om någon koordinat är $= 0$, blir $V = 0$, vilket inte kan vara maximum.) Villkoret $\text{grad}V = \lambda \text{grad}g$ ger tillsammans med bivillkoret $g = 0$ de fyra ekvationerna:

$$(1) \quad 8yz = 2\lambda x$$

$$(2) \quad 8xz = 2\lambda y$$

$$(3) \quad 8xy = 4\lambda z$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + 2z^2 - 6 = 0.$$

(1), (2) och (3) ger $2\lambda = \frac{8yz}{x} = \frac{8xz}{y} = \frac{8xy}{z}$ (observera att x, y, z antas > 0 och kan förkortas bort i ekvationerna).

Man får: $y^2 = x^2$, dvs $y = x$ och $2z^2 = x^2$, dvs $x = \sqrt{2}z$.

Detta insatt i bivillkoret ger $x^2 + x^2 + 2 \cdot (x^2/2) = 6$, $3x^2 = 6$, $x = y = \sqrt{2}$ och $z = 1$.

Beräkningarna ger en unik lösning för fallet $x, y, z > 0$, vilket måste svara mot ett globalt maximum då $V > 0$ inuti och $= 0$ på randen av första oktanten och eftersom V är kontinuerlig och deriverbar.

Den maximala volymen $V_{max} = V(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) = 8 \cdot 2 = \underline{16}$ volymsenheter.

9. Ekvationerna

$$(1) \quad 2x + y - 4z = 1 \quad \text{och}$$

(2) $x + 3y - 2z = 0$ svarar mot två plan som inte har samma normalriktning. De måste alltså ha en skärningslinje L, dvs ekvationerna (1) och (2) har oändligt många lösningar,

Som ekvation (3) kan man därför ta vilken som helst

linjärkombination av ekvationerna (1) och (2) (av typ $\alpha(VL)_1 + \beta(VL)_2 = \alpha(HL)_1 + \beta(HL)_2$), exempelvis summan: (3) $3x + 4y - 6z = 1$.

Ekvationssystemet (1), (2) och (3) är alltså exempel på ett system med oändligt många lösningar. Om man förändrar konstanten i högerledet i (3) får man ett nytt plan med samma normalriktning.

Tag exempelvis planet

(4) $3x + 4y - 6z = 0$. Detta nya plan är parallellt med planet (3) och har alltså inga punkter gemensamma med detta plan och därmed inte heller med skärningslinjen L. Ekvationssystemet (1), (2) och (4) är alltså exempel på ett system utan lösningar.

10a. Antag att $AB = A$ och $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ (A och B nxn-matriser), där $\lambda \neq 0$.

Då gäller $BA\bar{v} = B(A\bar{v}) = B(\lambda\bar{v}) = \lambda B\bar{v}$.

Men eftersom $BA = A$ har vi också:

$$BA\bar{v} = A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Alltså gäller $\lambda B\bar{v} = \lambda\bar{v}$. Och eftersom $\lambda \neq 0$ drar man slutsatsen

$B\bar{v} = \bar{v}$, dvs $\bar{v}$ är egenvektor till B svarande mot egenvärdet $\lambda = 1$

VSV.

10b. Antag att B har en konstant radsumma $= 1$, dvs $\sum_{k=1}^n B_{jk} = 1$, för varje

rad. (Den summerade raden är j :e raden: $B_{j1}, \dots, B_{jn}$.)

Antag att A :s rader alla är identiska: $A_{j1}, \dots, A_{jk}, \dots, A_{jn} = a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$.

Vi bildar produkten BA :

$$BA = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1k} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{j1} & \dots & B_{jk} & \dots & B_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nk} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_k & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_k & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Den allmänna produktkomponenten $(BA)_{jk}$ blir då (j :e raden i B gånger k :e kolumnen i A):

$$(BA)_{jk} = B_{j1}a_k + \dots + B_{jk}a_k + \dots + B_{jn}a_k = \left(\sum_{j=1}^n B_{jk}\right)a_k = a_k = A_{jk},$$

eftersom $\sum_{j=1}^n B_{jk} = 1$ och A :s jk -komponent, $A_{jk} = a_k$.

Man får alltså $BA = A$, VSV.