

Institutionen för matematik
KTH
B.Ek

Tentamen i 5B1116, Matematik 2 för Bio, K m.fl.
Tisdagen den 9 mars 2004

Skrivtid: 14.00 – 19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Inga hjälpmedel tillåtna.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

Preliminära betygsgränser (inklusive bonuspoäng) är 16, 22 och 30 poäng för betygen 3, 4 respektive 5.

Ange på skrivningsomslaget hur många bonuspoäng du har.

Alla använda koordinatsystem är ortonormerade.

1. (3p) Finn alla lösningar x, y, z, u till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 7x + 3y - z + u = 2 \\ 12x + 5y - 2z + u = 4 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

2. (3p) Avgör om planet med ekvationen $4x - 8y + z + 2 = 0$ och linjen som ges av $(x, y, z) = (2 + t, 3 + t, -4 + 4t)$ skär varandra. Om de gör det, bestäm skärningspunkten. Finn annars avståndet mellan planet och linjen.

3. (3p) Hur snabbt (dvs med hur mycket per längdenhet) ökar funktionen

$$f(x, y, z) = \arctan(x - 2y) - e^{yz} + x^2$$

i riktningen $(2, 1, -2)$ utgående från punkten $(1, 1, 0)$?

4. (3p) Bestäm, om den existerar, inversmatrisen A^{-1} till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (3p) Bestäm ekvationen för tangentplanet i punkten $(1, 2, 1)$ till ytan som ges av

$$x^2y + xy^2z + x^2z^3 - z^2 = 6.$$

6. (4p) Transformera ekvationen

$$13x^2 + 6xy + 5y^2 = 28$$

till huvudaxelform och avgör vilken kurva ekvationen beskriver. Ange också huvudaxlarnas riktningar.

Vänd!

7. (4p) Antag att $f(x, y)$ är en differentierbar funktion. Inför då $(x, y) \neq (0, 0)$ nya variabler u, v enligt

$$\begin{cases} u = x^4 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

och uttryck $\frac{\partial f}{\partial u}$ med hjälp av $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.

8. (4p) Finn alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2 + y^3$$

och ange deras karaktärer (max eller min).

9. (4p) Vilka värden antar funktionen

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + yz + z^2$$

då $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$?

10. (4p) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ är tre icke-komplana vektorer i rummet (rymden), dvs det finns inget plan som är parallellt med alla tre vektorerna. Bestäm volymen av området som ges av att $\mathbf{r} = (x, y, z)$ uppfyller

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 \leq 2 \quad \text{och} \quad -1 \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leq 1.$$

Ledning: Använd matrisen som har $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ som radvektorer.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan och på institutionens hemsida.