

Allmänna ekvationer

Ex1: $\sin x = 0$

har lösningen $x=0$ men
också $x=\pi, 2\pi$ osv

Ex2: $x^2 + 1 = 0$

saknar reella lösningar

Ex3: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Ex 4: } X = \sqrt{X+1} \Rightarrow X^2 = X+1$$

$$\Leftrightarrow X^2 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$X = \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 0 \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Så} \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2} + 1}$$

$$X = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0 \quad X = -\sqrt{X+1} !$$

Ekvationssystem

$$\text{Ex 5: } \begin{cases} xy = 6 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) = 6 \\ y = 5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = 5-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ y = 5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ och } y=2 \\ \text{eller} \\ x=2 \text{ och } y=3 \end{cases}$$

$$\text{Ex 6: } \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{rad 1} - 3\text{rad 2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 20 \\ x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -6 + 4 = -2 \end{cases}$$

går att gå tillbaka genom
att ta $\text{rad 1} + 3\text{rad 2}$.

Ex 6 är ett exempel på ett
linjärt ekvationssystem.

$$\text{Ex 7: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{rad 1} - 2\text{rad 2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{rad 3} - 3\text{rad 2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cdot \text{rad 1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + \frac{3}{5}x_3 = \frac{4}{5} \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{rad 2} + 2\text{rad 1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + \frac{3}{5}x_3 = \frac{4}{5} \\ x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{8}{5} \\ 8x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{rad 3} - 8\text{rad 1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + \frac{3}{5}x_3 = \frac{4}{5} \\ x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5}x_3 = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \cdot \text{rad 3} \end{bmatrix}$$

Vi kan gå tillbaka genom att ta $\frac{1}{5}\text{rad 3}$.

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 + \frac{3}{5}x_3 = \frac{4}{5} \\ +\frac{1}{5}x_3 = \frac{8}{5} \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{rad } 1 - \frac{3}{5}\text{rad} \\ \\ \end{array} \right] \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ +\frac{1}{5}x_3 = \frac{8}{5} \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \\ \text{rad } 2 - \frac{1}{5}\text{rad} \\ \\ \end{array} \right] \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ = -1 \\ = 1 \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

- att man till en rad lägger till en multipel av en annan rad.
- att multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$
- att byta plats på rader

matrisbehandling

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

Ex 7 med matriser:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 3 \end{array} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 8 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Föreläsning 1, sid 10

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 1/5 & 8/5 \\ 0 & 8 & 5 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-8} \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right) \boxed{5} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \boxed{-3/5} \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \boxed{-1/5} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$