

Vektorer

En pil i planet eller rummet är en riktad sträcka som utgår från någon punkt. Två pilar är ekvivalenta om de har samma längd och riktning.

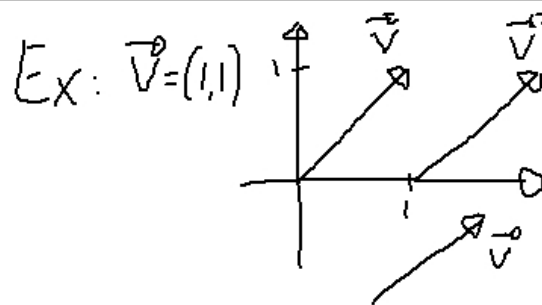
En vektor är en ekvivalensklass av pilar.



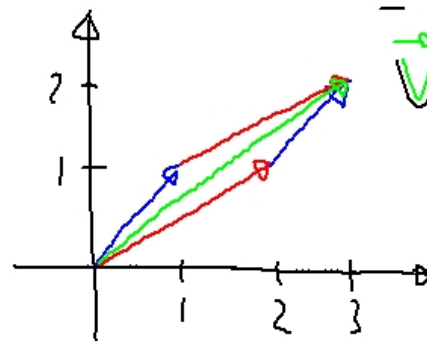
olika representat.
av samma
vektor.

Med andra ord: en vektor är en riktad sträcka där man inte tar hänsyn till utgångspunkten. Om vi inför de vanliga koordinaterna i planet så kan vi välja representanten som utgår från origo. Vi ser då att vektorn bestäms av slutpunkten. En vektor kan därför anges genom att ge en punkt.

Föreläsning 10, sid 3

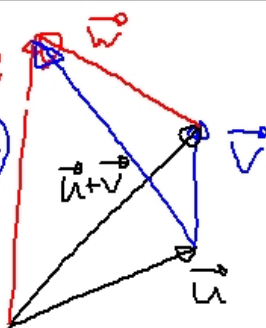


Ex: $\vec{v} = (1,1)$, $\vec{u} = (2,1)$
 $= \vec{u} + \vec{v}$



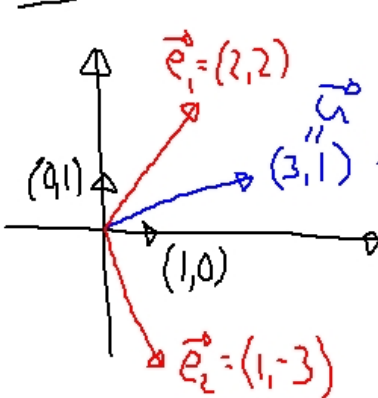
V_i observerar
 att
 $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$
 (Triangel olikheten)

Ex: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
 $= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



koordinater och koordinatsystem

Ex:



$\vec{e}_1 = (2, 2)$
 $\vec{e}_2 = (1, -3)$
 $\vec{u} = (3, 1)$
 $(3, 1) = 3 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$
 $= \frac{5}{4} (2, 2) + \frac{1}{2} (1, -3)$

koordinater

koordinater

Fungerar så länge basvektorerna
ej är parallella (dvs ej har samma
riktning eller omvänd riktning)

Vi kan då skriva en godtycklig
vektor som

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

på ett unikt sätt.

Antag att koordinaterna ej är unika:

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x'_1) \vec{e}_1 = (x'_2 - x_2) \vec{e}_2$$

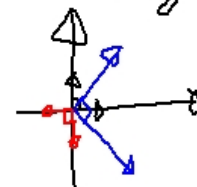
så om $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ ej parallella
för vi $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$.

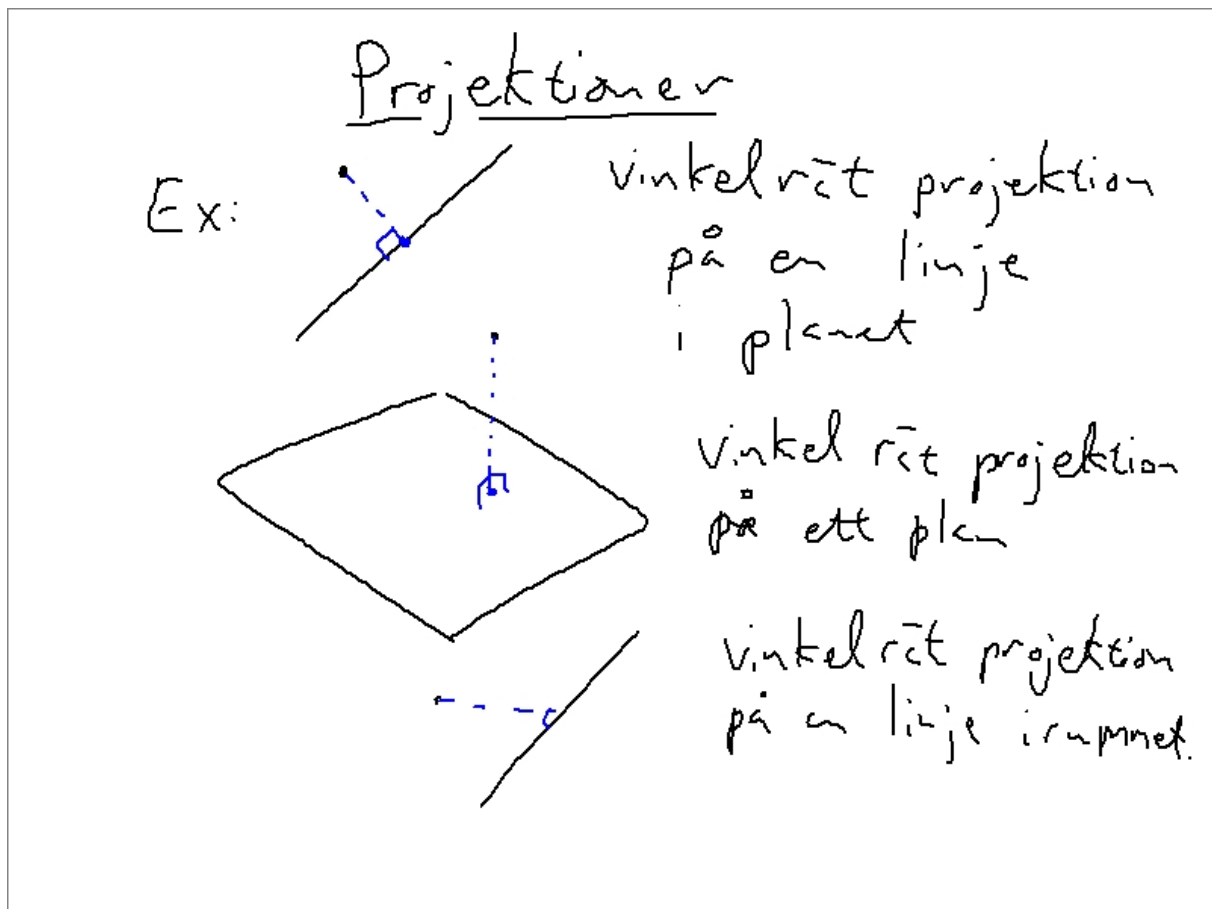
Om $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ säger vi att
 (x_1, x_2) är vektorns koordinater
med avseende på basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Ex: i vårt exempel har alltså
vektorn $\vec{u}$ koordinaterna $(3, 1)$
med avseende på basen $\{(1, 0), (0, 1)\}$
och koordinaterna $(\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$ med avseende
på basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

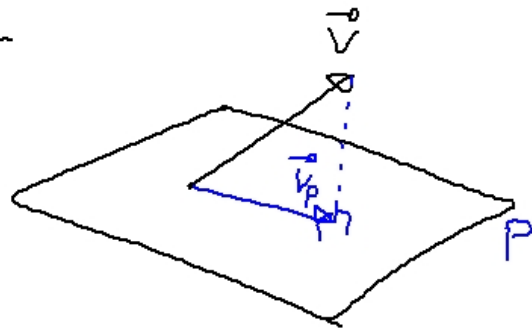
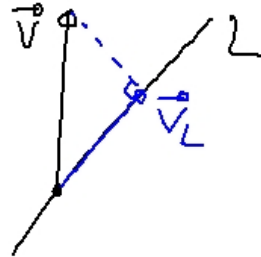
Vi ser också att $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$
har koordinaterna $(2,2)$ resp $(1,3)$
med avseende på basen $\{(1,0), (0,1)\}$.
men koordinaterna $(1,0)$ resp $(0,1)$
med avseende på basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Om basvektorerna är parvis vinkelräta
säger vi att de är ortogonala, och om
de dessutom alla har längd 1 säger
vi att de är ortonormala.





Projektionerna av en vektor
blir en vektor



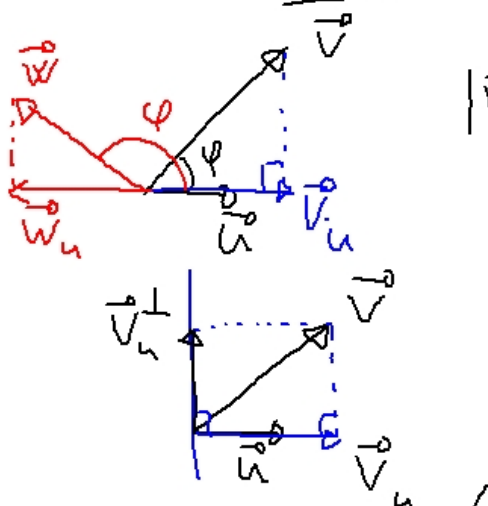
Vi har att

$$\vec{u}_L + \vec{v}_L = (\vec{u} + \vec{v})_L$$

$$(k\vec{u})_L = k\vec{u}_L$$

Skalar produkt $|\vec{u}|$ är längden av $\vec{u}$.

$$|\vec{v}_u| = |\vec{v}| |\cos \varphi|$$



Def (skalär produkt)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi$$

$$(\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0})$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad \text{Speciellt: } \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

Sats: (egenskaper hos skalärprodukten)

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff$ spetsig vinkel
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff$ rät vinkel
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff$ trubbig vinkel
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ och $= 0$ precis då $\vec{u} = \vec{0}$.
- $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (följer av att $(u+v)_i = u_i + v_i$)
- $\vec{v}_u = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}$, $|\vec{v}_u| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|}$
 $\vec{v}_u^\perp = \vec{v} - \vec{v}_u$ $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ är en enhetsvektor i $\vec{u}$'s riktning

Skalarprodukt och koordinater

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer med koordinaterna (x_1, y_1, z_1) resp (x_2, y_2, z_2) med avseende på någon bas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Så

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{v} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3$$

$$\text{och } \vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \cdot (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) =$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1 x_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + x_1 y_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + x_1 z_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \\
 &+ y_1 x_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + y_1 y_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + y_1 z_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \\
 &+ z_1 x_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + z_1 y_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + z_1 z_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \\
 &= x_1 x_2 |\vec{e}_1|^2 + y_1 y_2 |\vec{e}_2|^2 + z_1 z_2 |\vec{e}_3|^2 + \\
 &+ (x_1 y_2 + y_1 x_2) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + (x_1 z_2 + z_1 x_2) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + (y_1 z_2 + z_1 y_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

Om nu basen är en ON-bas (ortonormal bas), dvs $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$ för $i \neq j$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Ex: Om $\vec{u} = (2, 1, 0)$ och

$\vec{v} = (1, 0, 3)$ får vi $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u} \vec{v}^T$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 2$$

Speciellt har vi att om

$\vec{u} = (x, y, z)$ så blir

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$