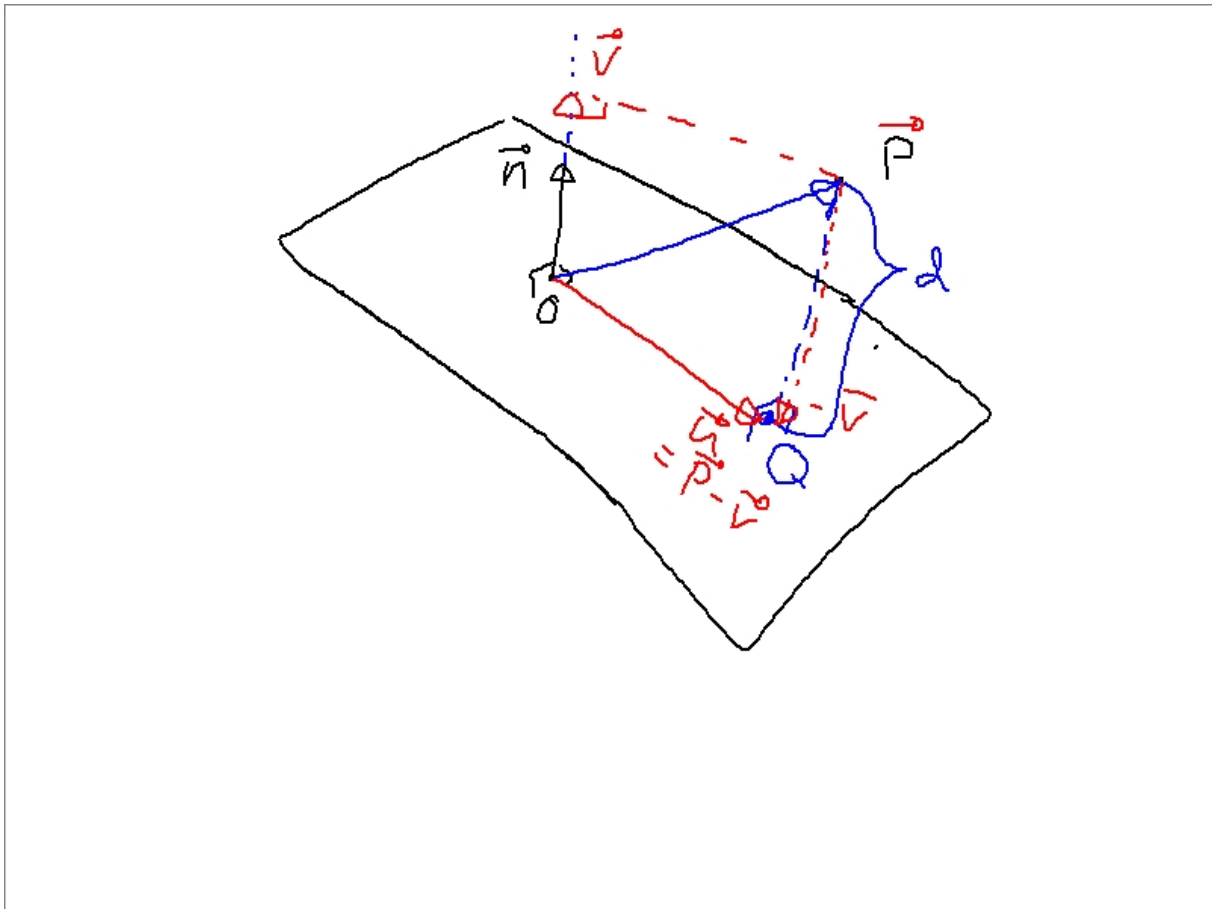
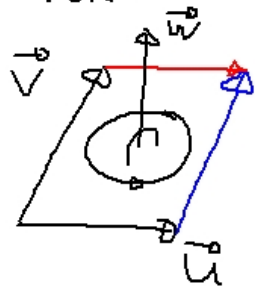


Föreläsning 11, sid 1



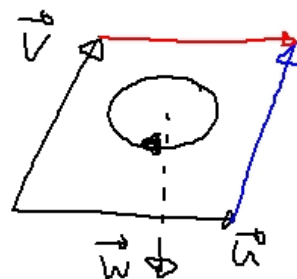
Kryssprodukt

Two vectors span an area



oriented
area element
given by $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$



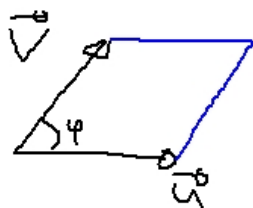
oriented
area element
given by $\vec{v}, \vec{u}$

$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$$

OBS! Det är viktigt att skilja
på skalärprodukten som blir ett
tal och kryssprodukten som
blir en vektor!

Så kryssprodukten skall vara
den vektor som är ^{orienterat} vinkelrät mot
planet spännt av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och
har längd lika med arean av parallelo-
grammet.

Parallelogrammens area kan
räknas ut



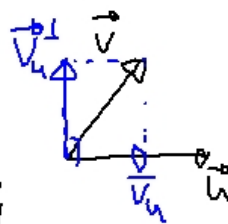
$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{basen} \cdot \text{höjden} \\ &= |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \varphi \end{aligned}$$

Vi har alltså $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\sin \varphi|$.
Speciellt ser vi att $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ om
vektorerna är parallella. Eftersom
area bara beror av höjden får vi
$$\vec{u} \times (\vec{v} + k\vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v}.$$

Sats: (kryssprodukts egenskaper)

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$
parallella
- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0, \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

- $k > 0$
- $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$
 - $\vec{u} \times (\vec{v} + k\vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v}$
 - $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}_u^\perp$
 - $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
 $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$



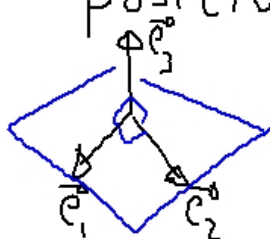
Kryssprodukt och koordinater

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ha koordinater $u = (x_1, y_1, z_1)$ resp. (x_2, y_2, z_2) med avseende på basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
Vi får då

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \times (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) \\ &= \cancel{x_1 x_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1} + x_1 y_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + x_1 z_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ &\quad + y_1 x_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \cancel{y_1 y_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2} + y_1 z_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ &\quad + z_1 x_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + z_1 y_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + \cancel{z_1 z_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3} =\end{aligned}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \\ + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$$

För att kunna förenkla ytterligare
antar vi att $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ är en
positivt orienterad ON-bas.

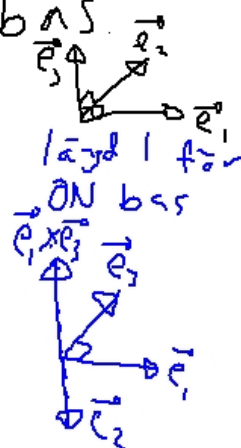


Alltså

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$



$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{e}_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_3 \\
 &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi ser att $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ för

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ex: Ange en vektor vinkelrät
mot såväl $(1, 3, 2)$ som $(2, -1, 7)$.

Lösni: $(1, 3, 2) \times (2, -1, 7) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} =$

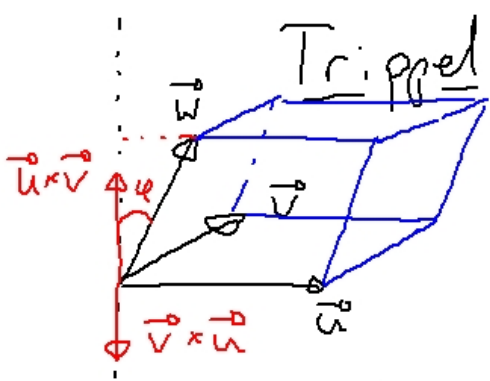
$$= \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (23, -3, -7)$$

Test: $(1, 3, 2) \cdot (23, -3, -7) = 1 \cdot 23 + 3(-3) + 2(-7) = 0$

$$(2, -1, 7) \cdot (23, -3, -7) = 2 \cdot 23 + 1 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 0$$

Trippel produkt



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ spänner upp ett positivt orienterat volymselement och $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ spänner upp ett negativt orienterat volymselement.

(Bestämmer tecken hos trippelprodukten)

Volymen hos elementet ges av basarean $\cdot$ höjden dvs

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\cos \varphi|$$

$$= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Def: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ kallas trippelprodukten av $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Sats (trippelproduktens egenskaper)

- Volymen hos parallelepipederna som spänns upp av vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ges av $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$
- Vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är positivt orienterade precis då $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} > 0$.
- Vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ är komplan (parallella med samma plan) om och endast om deras trippelprodukt är noll.

- trippelprodukten är ^{invariant} (ändras inte) under cyklisk permutation

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

(samma parallelepipeder, samma orientering)

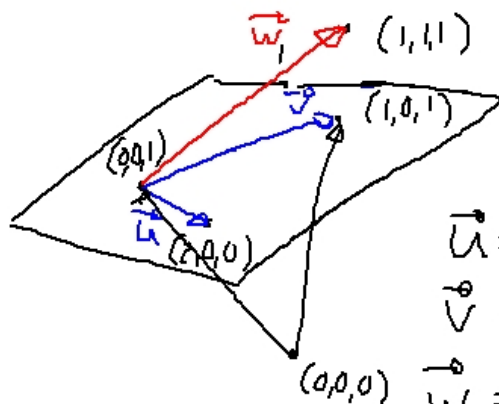
Trippelprodukt och koordinater

Låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vara ett positivt orienterat ON-bas och låt $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ ha koordinater $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ resp (x_3, y_3, z_3) . Då får vi

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} |y_1, z_1|, -|x_1, z_1|, |x_1, y_1| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3, y_3, z_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(utvecklat längs tredje raden)} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ex: Avgör om punkterna $(1,1,1)$ och $(2,-1,0)$ ligger på samma sida om planet, som innehåller punkterna $(0,0,1), (1,0,1), (2,0,0)$, eller ej.



$$\vec{u} = (2,0,0) - (0,0,1) = (2,0,-1)$$

$$\vec{v} = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0)$$

$$\vec{w}_1 = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$$

$$\vec{w}_2 = (2,-1,0) - (0,0,1) = (2,-1,-1)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

0 liks tecken
 = 0 olika sidor