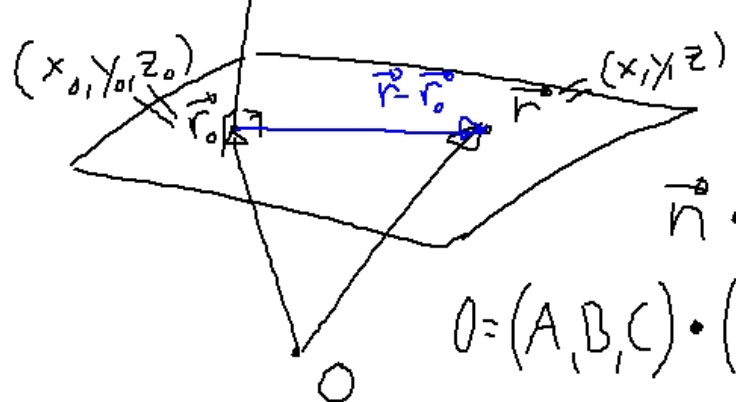


Plan.

På grupparbetena användes att en ekvation $Ax + By + Cz + D = 0$ beskriver ett plan. Vi kan se det på samma sätt som med linjerna. Låt planets normal vara $\vec{n}$. och $\vec{r}_0$ en punkt på planet.

$V:$ för $\vec{n} = (A, B, C)$



$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

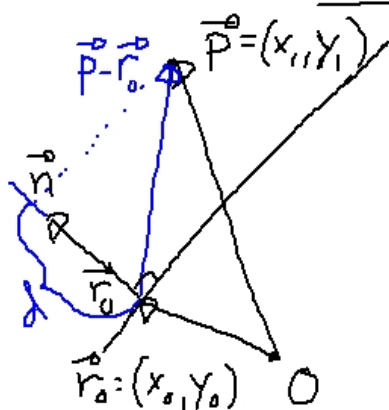
$0 = (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$0 = Ax + By + Cz - \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{-D}$

$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_0$

$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$

Avstånd



avstånd mellan punkt
och linje i planet

$$d = |(\vec{r}_P - \vec{r}_O) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}|$$

Enhetsvektor

Om linjen är på formen $Ax + By + C = 0$
får vi

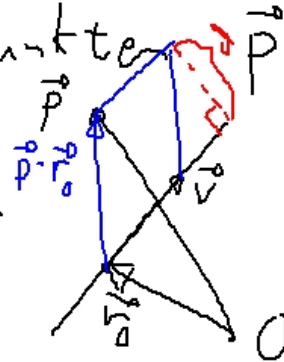
$$\vec{n} = (A, B)$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}_P - \vec{n} \cdot \vec{r}_O|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|Ax_1 + Bx_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

I tre dimensioner måste vi använda en annan metod. Om linjens ekvation på vektorform är $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{V}$ och punkten $\vec{p}$ som tidigare.

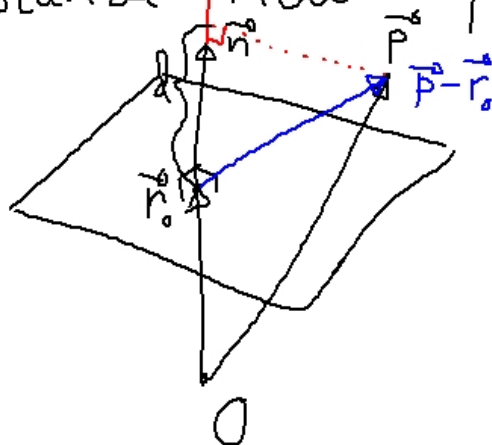
Kryssprodukten ger parallellvektor.
Sträckans area $= |\vec{V}| \cdot d$



Vi får så

$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{r}_0) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Avstånd mellan punkt och plan:



$$d = \left| (\vec{p} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Om planet är givet som
 $Ax + By + Cz + D = 0$ och
vektorn $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ får vi

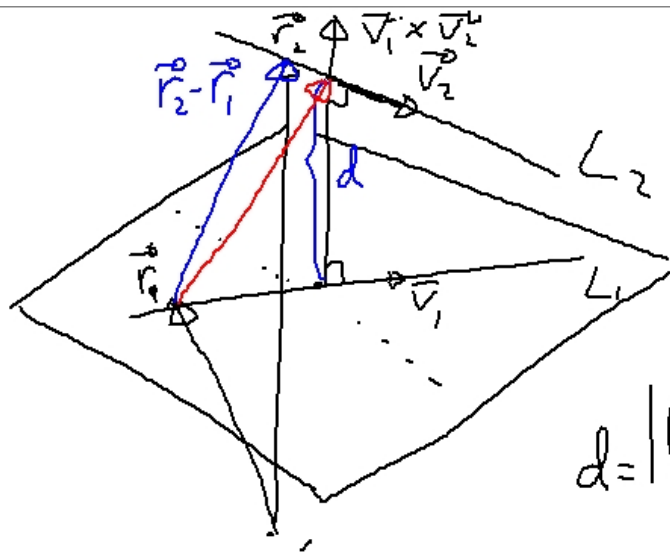
$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Avstånd mellan två icke parallella
linjer.

$$L_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1$$

$$L_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_2$$

Föreläsning 13, sid 7



$$d = \left| (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \right|$$

Linjära avbildningar

V : har sett att projektionen på en vektor uppfyller

$$\vec{v}_u + \vec{w}_u = (\vec{v} + \vec{w})_u$$

$$(k\vec{v})_u = k\vec{v}_u$$

Def: En avbildning A som tar vektorer till vektorer kallas linjär om den uppfyller

- $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$
- $A(k\vec{x}) = kA(\vec{x})$

$$\text{Låt } \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bas, e_j nödvändigtvis
en ON-bas

då blir

$$\begin{aligned} A(\vec{x}) &= A(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = \\ &= A(x_1 \vec{e}_1) + A(x_2 \vec{e}_2) = \\ &= x_1 A(\vec{e}_1) + x_2 A(\vec{e}_2) \end{aligned}$$

Avbildningen är således bestämd av
 $A\vec{e}_1$ och $A\vec{e}_2$.

$$\text{Låt } A \vec{e}_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2$$

$$A \vec{e}_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2$$

Antag att $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ är en ON-bas

$$A \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$A \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x_1 A\vec{e}_1 + x_2 A\vec{e}_2 \\ &= x_1 a_{11}\vec{e}_1 + x_1 a_{21}\vec{e}_2 + x_2 a_{12}\vec{e}_1 + x_2 a_{22}\vec{e}_2 \\ &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12})\vec{e}_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22})\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Alltså vektorn $\vec{x}$ med koordinater (x_1, x_2) tas till vektorn $\vec{y}$ med koordinater

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$