Sammansättning av linjära avbildningar

Ex: Låt A vara avbildningen i planet att spegla i linjen $x=y$ och B är avbildningen att töja i horisontell led med en faktor 3. Låt sedan C vara avbildningen som svarar mot att man först gör A och sedan B. Alltså $C(\vec{x}) = B(A(\vec{x}))$

Avbildningen C blir också linjär

* $$C(\vec{x}+\vec{y}) = B(A(\vec{x}+\vec{y})) =$$

$$= B(A(\vec{x})+A(\vec{y})) = B(A(\vec{x})) + B(A(\vec{y}))$$

$$= C(\vec{x}) + C(\vec{y}).$$

* $$C(k\vec{x}) = B(A(k\vec{x})) = B(kA(\vec{x}))$$

$$= kB(A(\vec{x})) = kC(\vec{x})$$

Låt D vara avbildningen som svarar mot att göra först B och sedan A. Bestäm matriserna för avbildningarna C och D.

Lösn: Matrisen för C ges av koordinaterna för $C(\vec{e}_1)$ och $C(\vec{e}_2)$. Vi har att

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ standard bas

$$C(\vec{e}_1) = B(A(\vec{e}_1)) = B(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$

$$C(\vec{e}_2) = B(A(\vec{e}_2)) = B(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1$$

Matrisen för C blir så

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

För D har vi:

$$D(\vec{e}_1) = A(B(\vec{e}_1)) = A(3\vec{e}_1) =$$
$$= 3A(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_2$$
$$D(\vec{e}_2) = A(B(\vec{e}_2)) = A(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan också räkna fram matriserna direkt genom matrismultiplikation.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Area och volym

Arean av parallellogrammet som spänns upp av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i planet ges av

$$|\vec{u}^{\perp} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}^{\perp}_{u}|.$$

Om $\vec{u} = (u_1, u_2)$ och $v = (v_1, v_2)$ med avseende på en bas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ får vi

$$|(-u_2, u_1) \cdot (v_1, v_2)| = |-u_2 v_1 + u_1 v_2| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

eller orienterat

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Under en linjär avbildning A tas parallellogrammet till parallellogrammet spänt av $A\vec{u}$ och $A\vec{v}$.

Vi vet att de nya vektorerna har koordinater

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Så den nya arean blir

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right| = \det A \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Så arean multipliceras med faktorn $\det A$.

Samma sak gäller volymer i tre dimensioner. Vi vet att volymen hos en parallellepipeder ges av trippelprodukten, som kan räknas

ut med determinanten
om man inför en positivt
orienterad ON-bas

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \longrightarrow \det A \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Övn 2.44: Låt $\vec{a} = (\lambda, 1)$ och $\vec{b} = (\lambda - 3, \lambda)$. Bestäm alla värden på λ för vilka

a) $\vec{a} \perp \vec{b}$, b) $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Lösn: a) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda, 1) \cdot (\lambda - 3, \lambda) = \lambda(\lambda - 3) + \lambda$$
$$= \lambda(\lambda - 2)$$

Så $\vec{a} \cdot \vec{b}$ om $\lambda = 0$ eller $\lambda = 2$.

b) $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = t\vec{a}$

$$(\lambda-3, \lambda) = t(\lambda, 1)$$

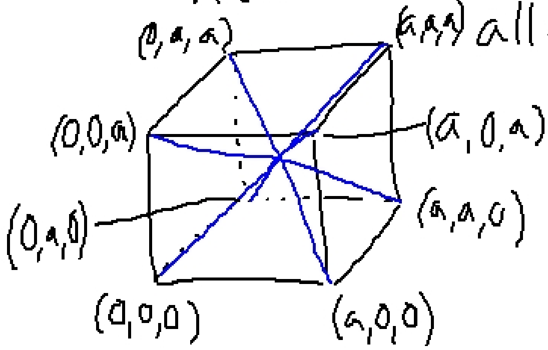
$$\iff \begin{cases} \lambda - 3 = t\lambda \\ \lambda = t \cdot 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t - 3 = t^2 \\ \lambda = t \end{cases}$$

$$t^2 - t + 3 = 0 \iff t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3}$$

saknar reella lösningar.

Slutsats: Det finns inget λ-värde som gör $\vec{a}$ och $\vec{b}$ parallella.

Övn 2.48: Vilka vinklar bildar rymddiagonalerna i en kub med varandra?



alla sidor har längd a.

diagonalerna har riktningar

$$\vec{d}_1 = (a,a,a)$$
$$\vec{d}_2 = (0,a,a) - (a,0,0) = (-a,a,a)$$
$$\vec{d}_3 = (a,a,0) - (0,0,a) = (a,a,-a)$$
$$\vec{d}_4 = (0,a,0) - (a,0,a) = (-a,a,-a)$$

$$\cos \varphi_{12} = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{(a,a,a)\cdot(-a,a,a)}{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a} =$$

$$= \frac{-a^2+a^2+a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

samma metod för övriga par.

Övn 3.3: Två räta linjer har ekvationerna $(x,y,z)=(-1,0,4)+t(3,6,0)$ och $(x,y,z)=(1,1,0)+t(0,-1,5)$. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom origo och är vinkelrät mot de båda givna linjerna. (ON-system)

Lösn: Eftersom linjen går genom origo, så räcker det att ta fram en riktningsvektor.

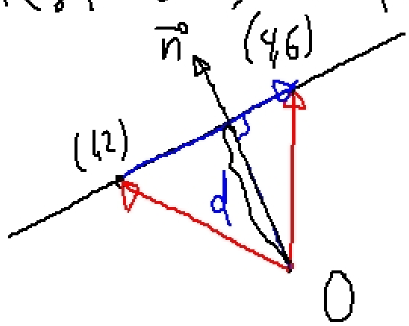
För att få en vektor vinkelrät mot bägge linjernas riktnings-vektorer kan vi ta kryssprodukten

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{e}_1} & \overset{-}{\vec{e}_2} & \overset{+}{\vec{e}_3} \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (30, -15, -3)$$

SVAR: Den sökta linjens ekvation blir $(x, y, z) = t(30, -15, -3)$

Övn 3.4: Beräkna avståndet till origo från den räta linje som går genom punkterna med koordinater (1,2) och (4,6). Vilken punkt på linjen ligger närmast origo? (ON-system)



$$(x,y) = (1,2) + t\underbrace{(3,4)}_{}$$

$(4,6)-(1,2)$

$$\vec{n} = (4,-3)$$

$$\vec{n}\cdot(3,4) = 0$$

$$d = \frac{|(1,2)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(1,2)\cdot(4,-3)|}{|(4,-3)|} =$$

Godtycklig punkt på linjen

$$= \frac{|4-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{2}{5}.$$

För att hitta den sökta punkten på linjen går vi i normalens riktning en sträcka med längd $\frac{2}{5}$.

$$\vec{v} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2}{5}\,\frac{(4,-3)}{5} = \left(\frac{8}{25}, -\frac{6}{25}\right)$$

Test: kolla om ligger på linjen annars $-\vec{v}$.