

$$\underline{\mathbb{R}^n}$$

Mängden av n -tupler $(x_1, \dots, x_n)$
av reella tal kallas $\mathbb{R}^n$.

Räkning som vanligt med vektorer.

I $\mathbb{R}^n$ finns från början origo
 $(0, \dots, 0)$ och en naturlig ON-bas

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

standardbasen

Vi kan införa en skalärprodukt
som tidigare. Så

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = \\ = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Speciellt kan vi införa vinkeln, φ ,
mellan två vektorer genom att
använda $\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$

men för det krävs det att $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$.

Sats (Schwarz olikhet):

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

med "=" precis då $\vec{x} \parallel \vec{y}$.

bevis: $f(t) = |\vec{x} + t\vec{y}|^2 = (\vec{x} + t\vec{y}) \cdot (\vec{x} + t\vec{y})$
 $= |\vec{x}|^2 + 2t \vec{x} \cdot \vec{y} + t^2 |\vec{y}|^2$

$$f'(t) = 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + 2t |\vec{y}|^2$$

$$\text{så } f'(t) = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = -t |\vec{y}|^2$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Så} \\ \min f(t) &= f\left(-\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^2}\right) = \\ &= |\vec{x}|^2 - 2 \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} \\ &= |\vec{x}|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} \end{aligned}$$

$$\text{Men } f(t) = |\vec{x} + t\vec{y}|^2 \geq 0 \quad \text{så}$$

$$|\vec{x}|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} \geq 0 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 \geq (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$$

Sats (Triangelolikheten):

$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ med
likhet precis då vektorerna är
riktade åt samma håll. ($\vec{x} = k\vec{y}$
 $k > 0$)

bevis: Vi vill visa att $(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 - |\vec{x} + \vec{y}|^2 \geq 0$.

Vi har att

$$\begin{aligned} (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 - |\vec{x} + \vec{y}|^2 &= |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 \\ &\quad - (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{|\vec{x}|^2} + 2|\vec{x}||\vec{y}| + \cancel{|\vec{y}|^2} - (\cancel{|\vec{x}|^2} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \cancel{|\vec{y}|^2}) \\ &= 2|\vec{x}||\vec{y}| - 2\vec{x} \cdot \vec{y} \geq 0 \end{aligned}$$

enl Schwarz olikhet.

Likhet har vi när $|\vec{x}||\vec{y}| = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Men Schwarz olikhet säger att

$$|\vec{x}||\vec{y}| = |\vec{x} \cdot \vec{y}|$$

precis när $\vec{x} \parallel \vec{y}$. Slutligen är

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \vec{x} \cdot \vec{y}$ precis då de har
samma riktning.

Linjärt beroende

Om $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n$ säger vi att $\vec{v}$ är en linjär kombination av $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$. Vi säger att vektorerna $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ är linjärt beroende. Speciellt gäller att om $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ är linjärt beroende så är de parallella, och om $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ är linjärt beroende så är de komplanar, dvs de ligger i samma plan.

Om vektorerna e_j är linjärt beroende
så är de linjärt oberoende.

Ex: Är vektorerna $(1, 0, -1)$, $(?, 1, 1)$
och $(?, -1, ?)$ linjärt beroende
eller ej?

Lösning: Vi testar om de är beroende

$$x_1 \underbrace{(1, 0, -1)}_{\vec{u}} + x_2 \underbrace{(\quad, 1, 1)}_{\vec{v}} + x_3 \underbrace{(\quad, -1, \quad)}_{\vec{w}} = (0, 0, 0)$$

Vektorerna är linjärt beroende om
det finns icke-trivial lösning, dvs
 x_1, x_2 och x_3 inte alla noll.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{u}^T & \vec{v}^T & \vec{w}^T \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \nwarrow \\ \boxed{2} \boxed{2} \\ \nwarrow \swarrow \end{matrix}$$

$$\leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \nwarrow \\ \boxed{\frac{1}{7}} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \nwarrow \\ \nwarrow \swarrow \\ \boxed{1} \boxed{-4} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{bara lösningen } x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ \text{så de är linjärt oberoende.} \end{matrix}$$

Sats: En vektor $\vec{v}$ kan skrivas
som en linjär kombination av
vektorerna $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ precis
då ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{u}_1^T & \dots & \vec{u}_n^T & \vec{v}^T \end{array} \right)$$

har en lösning.

Speciellt gäller att vektorerna $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ är linjärt beroende precis då $(\vec{u}_1^T \dots \vec{u}_m^T | \vec{0})$ har icke-triviala lösningar.

Tar vi fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ blir systemet liggande och har därmed icke-triviala lösningar. De måste alltså vara linjärt beroende.

Standard basen ger ett exempel på n st linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ och man kan också visa att varje uppsättning linjärt oberoende vektorer kan utvidgas till en mängd på n st linjärt oberoende vektorer. En uppsättning på n st linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ kallas en bas.

En godtycklig vektor kan skrivas
som en linjärkombination i
en given bas.

Ex: Vektorerna $(1, 2, 1, 2)$ och $(2, 0, 1, 0)$
är linjärt oberoende. Vektorn
 $(1, 0, 0, 0)$ kan inte skrivas som en
linjärkombination

$$(1, 0, 0, 0) = a(1, 2, 1, 2) + b(2, 0, 1, 0)$$

$$\ast 0 = 2a + 0b \Rightarrow a = 0 \quad \ast b = 0$$

Vi kan också lägga till $(0,1,0,0)$.

Vi testar om vi har en bas

Vi vill att $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ bara har den triviala lösningen

Ett sätt att testa detta är genom att räkna determinanten för vänsterledet.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Så vektorerna är linjärt oberoende.

Sats: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ kolmvektorerna i A
är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$
 $\det A = \det A^T \Rightarrow$ radvektorerna i A är linjärt oberoende.