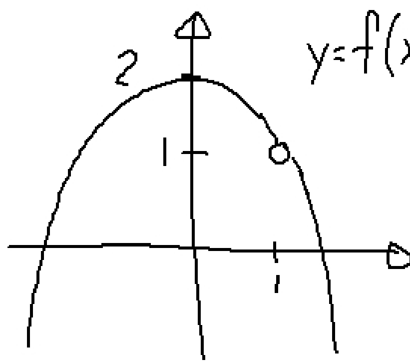
Gränsvärden

Funktioner av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Ex: $y = f(x) = 2 - x^2, \quad x \neq 1$



Det är klart att $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 - 1^2 = 1$

Vi kan också beskriva grafen som en parameterkurva $\vec{r} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right), 2 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \right) \quad t \neq 0$$

Det vore därför naturligt att sätta

$$\lim_{t\to\infty} \vec{r}(t) = (1,1).$$

Vi tänker oss alltså att

$$\lim_{t\to\infty} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right), \lim_{t\to\infty}\left(2-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2\right)\right) = (1,1)$$

Ett annat sätt att säga detta är att avståndet mellan punkten $\vec{r}(t)$ och $(1,1)$ ska krympa mot noll när $t \to \infty$, dvs

$$\lim_{t \to \infty} \left| \vec{r}(t) - (1,1) \right| = 0$$

Def: Om $\vec{r}(t)$ är en funktion av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ så gäller

a) $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{C}$ om och endast om

$$\lim_{t \to a} \left| \vec{r}(t) - \vec{C} \right| = 0 \quad \text{(egentligt)}$$

b) $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \infty$ om och endast om

$$\lim_{t \to a} \left| \vec{r}(t) \right| = \infty \quad \text{(oegentligt)}$$

OBS! Det blir alltid $+\infty$ eftersom $|\vec{r}(t)| \geq 0$.

Ex 3.7: Låt $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t)$

då ser vi att

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} =$$

$$= |t| \longrightarrow \infty \text{ när } t \to \infty$$

men $\lim_{t\to\infty} t\cos t$ och $\lim_{t\to\infty} t\sin t$ saknas!

Def: En funktion $\vec{r}(t)$ av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ kallas kontinuerlig i a om $\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$.

En funktion är kontinuerlig om den är kontinuerlig i alla punkter i D_f.

Derivator

Def: Låt $\vec{r}(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Vi definierar då derivatan av $\vec{r}$

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Ex: Låt $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t)$

då blir

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} =$$

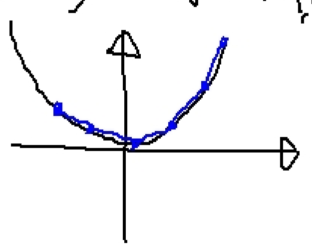
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big((t+h)\cos(t+h), (t+h)\sin(t+h)\big) - (t\cos t, t\sin t)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{(t+h)\cos(t+h) - t\cos t}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)\sin(t+h) - t\sin t}{h} \right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}(t\cos t), \frac{d}{dt}(t\sin t) \right) =$$

$$= (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$$

Om man vill beräkna längden på en parameterkurva $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ kan man använda en indelning i t.
Det ger att kurvan kan approximeras med små linjestycken av längd $\sqrt{\Delta x_{1i}^2 + \dots + \Delta x_{ni}^2}$.



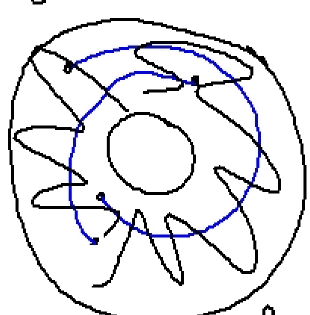
Det ger att

(längden) $s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum \sqrt{\Delta x_{1,i}^2 + \dots + \Delta x_{n,i}^2} =$

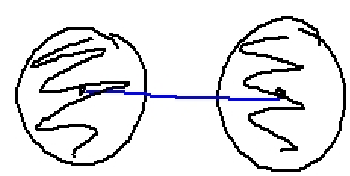
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum \left(\sqrt{\frac{\Delta x_{1,i}^2}{\Delta t^2} + \dots + \frac{\Delta x_{n,i}^2}{\Delta t^2}} \right) \Delta t$$

$$= \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\, dt = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

Def: En mängd kallas sammanhängande om det för varje par av punkter finns en kurva som börjar i den ena punkten och slutar i den andra och ligger helt i mängden.



sammanhängande



ej sammanhängande

Funktioner av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Def: Funktionen $f(x,y)$ av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har gränsvärdet A då $(x,y) \to (a,b)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \quad \text{om}$$

$$\lim_{t\to c} f(x(t),y(t)) = A$$

för alla funktioner $\vec{r}: t \to (x(t), y(t))$

sådana att

$$\lim_{t \to c} \vec{r}(t) = (a, b).$$

Om

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

säger vi att funktionen f är kontinuerlig i punkten (a,b).

Ex: Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{x^2 + y^2}$.

Vi vill undersöka om f har ett gränsvärde när $(x,y) \to (0,0)$.

Om vi låter (x,y) går mot $(0,0)$ längs med x-axeln får vi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Så gränsvärdet blir 1 om det existerar.

Men om vi går mot (0,0) längs linjen $x=y$ får vi

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = 0$$

Vi ser att gränsvärdet inte existerar!

Uppgift: läs igenom avsnitt 3.3.

Allmänna egenskaper

- alla funktioner definierade med hjälp av elementära uttryck är kontinuerliga.
- Om f är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definierad på en kompakt mängd så gäller:

  i) f har ett största och minsta värde.

ii) Om D_f är (bågvis) sammanhängande så antar f alla värden mellan sitt största och minsta värde.

Ex: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Största värde 1

Def: För funktioner av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definierar vi

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A}$$

om och endast om

$$\lim_{t \to c} \vec{f}(\vec{r}(t)) = \vec{A}$$

för alla funktioner $\vec{r}(t)$ för vilka $\lim_{t \to c} \vec{r}(t) = \vec{a}$ och

$$V_{\vec{r}(t)} \subseteq D_f \setminus \{\vec{a}\}.$$