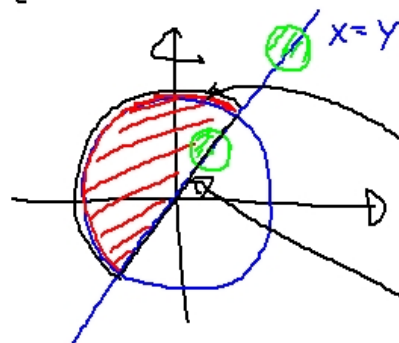


Övn 201: Ange inre och randpunkter till följande mängder

a)  $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ och } y > x\}$



rand  
 ①  $x^2 + y^2 = 1$   
 $y \geq x$

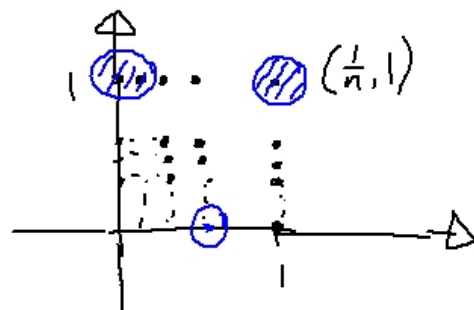
②  $y = x$   
 $x^2 + y^2 \leq 1$

b)  $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, y > x\}$

Samma

inre:  $x^2 + y^2 < 1$   
 $y > x$

$$c) \left\{ \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) : n \text{ och } m \text{ naturliga tal} \right\}$$



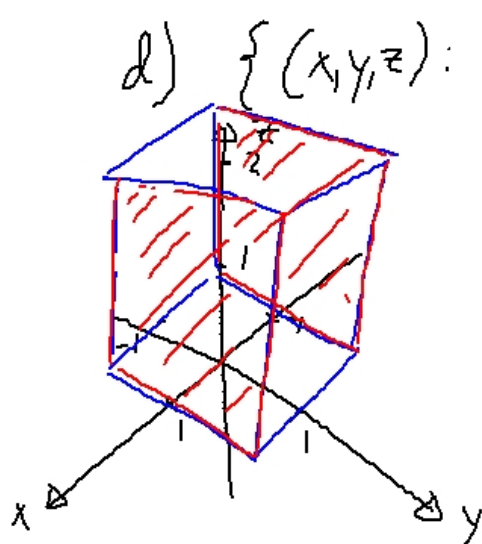
randen

$$\left( \frac{1}{n}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{m} \right)$$

$$(0, 0)$$

$$\left( \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right)$$

inre  
saknas



$$d) \{ (x, y, z) : |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1 \}$$

rand:

$$|x| = 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$$

$$|x| \leq 1, |y| = 1, |z| \leq 1$$

$$|z| = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1$$

inre punkter

$$|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1.$$

## Differentierbara funktioner

Vi börjar med att påminna oss  
en variabelanalys.  $\lim_{h \rightarrow 0} R(x, h) = 0$

$$(*) \quad f(x+h) = f(x) + Ah + R(x, h)h$$

Om vi flyttar över  $f(x)$  till VL  
och delar med  $h$  och låter  $h \rightarrow 0$   
får vi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (A + R(x, h)) \\ = A$$

### Linjära funktioner

En linjär funktion  $f$  av typ  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$  är en linjär avbildning, så den ges av en matris  $A$ . Vi har ett

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

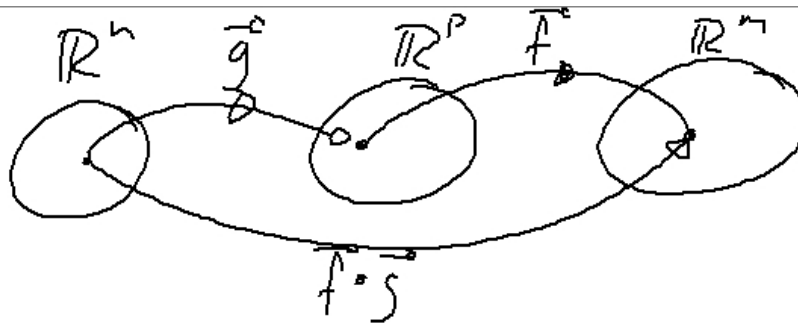
Eftersom  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  är den en  $n \times 1$  vektor och resultatet ska bli en  $m \times 1$  vektor så matrisen  $A$  är  $m \times n$ -matris.

Vi kan sammansätta linjära funktioner på samma sätt som linjära avbildningar. Om  $\vec{f}$  är en linjär funktion från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$  och  $\vec{g}$  en från  $\mathbb{R}^k$  till  $\mathbb{R}^n$  blir sammansättningen

$$\vec{f} \circ \vec{g}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) = A(B\vec{x})$$

$$\text{där } \vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} \text{ och } \vec{g}(\vec{x}) = B\vec{x}$$

Föreläsning 18, sid 7



## Differentierbara funktioner

Vi vill nu definiera differentierbarhet analogt med en variabel fall:

Def: En funktion  $\vec{f}$  av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  kallas differentierbar i punkten  $\vec{x}$  om den är definierad i en omgivning av  $\vec{x}$  och

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobian matrix}}}{A} \vec{h} + R(\vec{x}, \vec{h}) |\vec{h}|$$



där  $A$  inte beror av  $\vec{h}$   
 (men kan bero av  $\vec{x}$ ) och  

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \vec{R}(\vec{x}, \vec{h}) = \vec{0}$$

Ex1: Om  $m=n=1$  har vi vår gamla  
 envariabels definition och  $A=f'(x)$ .

Ex2: Om  $n=1$  är  $h$  ett tal så vi  
 kan dela med  $h$  och ta gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cancel{A + \vec{R}(x, h)} \frac{|h|}{h} = A$$

$\{E_x\} : (n=2, m=1) \int_a^b f(\vec{x}) dx$  blir tal.  
Vi har  $(\vec{x}=(x,y), \vec{h}=(h,k), A=(a,b))$   
$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + (a,b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \underbrace{R(x,y,h,k)}_{|(h,k)|}$$
  
där  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R(x,y,h,k) = 0$ .

Vi sätter  $k=0$  och delar med  $h$

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = a + R(x, y, h, 0) \frac{|h|}{h}$$

Låt nu för fixt  $y$

$$g_y(x) = f(x, y).$$

Då blir

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_y(x+h) - g_y(x)}{h} \\ = g'_y(x)$$

Den här typen av derivata, när man fixerar alla utom en variabel, kallas partiell derivata.  $g'_y(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$

Låter vi istället  $h=0$  och  
går längs  $y$ -axeln för vi  
derivatan i den andra variabeln,  
dvs om vi sätter  $\tilde{f}_x(y) = f(x, y)$   
så blir

$$b = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = \tilde{f}'_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Sammantaget blir då

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Vi har alltså

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + \\ + R(x, y, h, k) |(h, k)|$$

eller, om man ändrar beteckningarna  
lite ( $x = x+h, y = y+k, a = x, b = y$ )

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) \\ + R(x, y, a, b) |(x-a, y-b)|$$

Precis som tangentlinjen är den linje som bäst approximerar är planet

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

det plan som bäst approximerar ytan  $z = f(x,y)$  i punkten  $(a,b, f(a,b))$ .

Det här planet kallas ytans tangent plan i punkten  $(a,b, f(a,b))$ .

Sats: i) Om  $f$  är en funktion  
av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  som är  
differentierbar i punkten  $\vec{x}^0$   
så är matrisen

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) \right)$$

och kallas gradienten av  $f$   
och betecknas  $\text{grad } f$  eller  $\nabla f$ .

ii) Mer allmänt om  $\vec{f}$  är en funktion av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , så  $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ , är en differentierbar funktion så blir matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}$$

Matrisen kallas Jacobi matrisen,  $J_f$ .



$$\text{Ex: } f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$

$$\text{så } \text{grad } f(x,y) = (2x, 4y)$$

och tangentplanet i  $(a,b)$   
blir

$$z = a^2 + 2b^2 + 2a(x-a)$$

$$+ 4b(y-b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= xy \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

Ex: Bestäm Jacobimatrizen  
till funktionen

$$\vec{f}: \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta = f_1 \\ y = r \sin \varphi \sin \theta = f_2 \\ z = r \cos \theta = f_3 \end{cases}$$

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$