

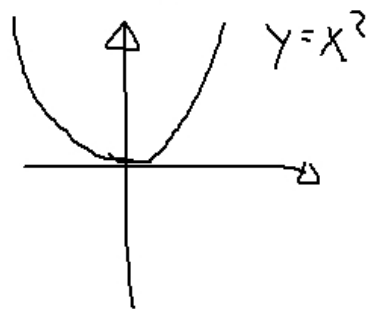
Kurvor

En parameterkurva är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definierad på ett intervall.

Men en kurva kan parametriseras på olika sätt.

Ex: $\vec{r}(t) = (t, t^2)$

$$\vec{s}(t) = (t^3, t^6)$$



Def: Låt $\vec{r}(t)$ vara en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definierad på ett intervall och anta att derivatan $\vec{r}'(t)$, utom i ett ändligt antal punkter, är kontinuerlig och $\neq \vec{0}$. Då säger vi att värdemängden är en styckvis reguljär kurva. Punkterna där derivatan ej existerar eller är lika med $\vec{0}$ kallas singulära. (map parametriseringen)

Om singulära punkter saknas
säger vi att kurvan är reguljär.

Ex: Kurvan $y = x^2$ kan ses som
värdemängden till $\vec{r}(t) = (t, t^2)$
eller $\vec{s}(t) = (t^3, t^6)$. Vi får

$$\vec{r}'(t) = (1, 2t) \neq \vec{0}$$

så kurvan är reguljär. Men

$$\vec{s}'(t) = (3t^2, 6t^5) \text{ som är } = (0, 0) \text{ om } t=0.$$

I den här parametriseringen blir $(0, 0)$ singulär.

Om vi normalerar får vi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}} = (1, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{s}'(t)}{|\vec{s}'(t)|} = \frac{(3t^2, 6t^5)}{\sqrt{9t^4+36t^{10}}} = \frac{\cancel{3t^2}(1, 2t^3)}{\cancel{3t^2}\sqrt{1+4t^6}} = (1, 0)$$

Vi kallar singulariteten för en
falsk singularitet eftersom den
försvinner när vi tar en annan
parametrisering.

$$\text{Ex: } \vec{r}(t) = (t^3, t^2)$$

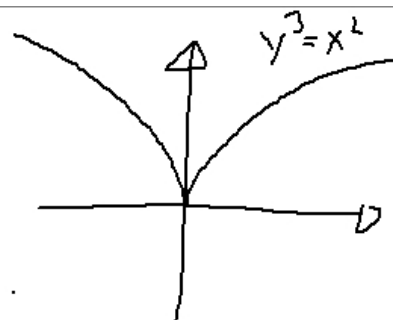
$$\vec{r}'(t) = (3t^2, 2t)$$

så $t=0$ singularitet.

Om vi normaliserar får vi

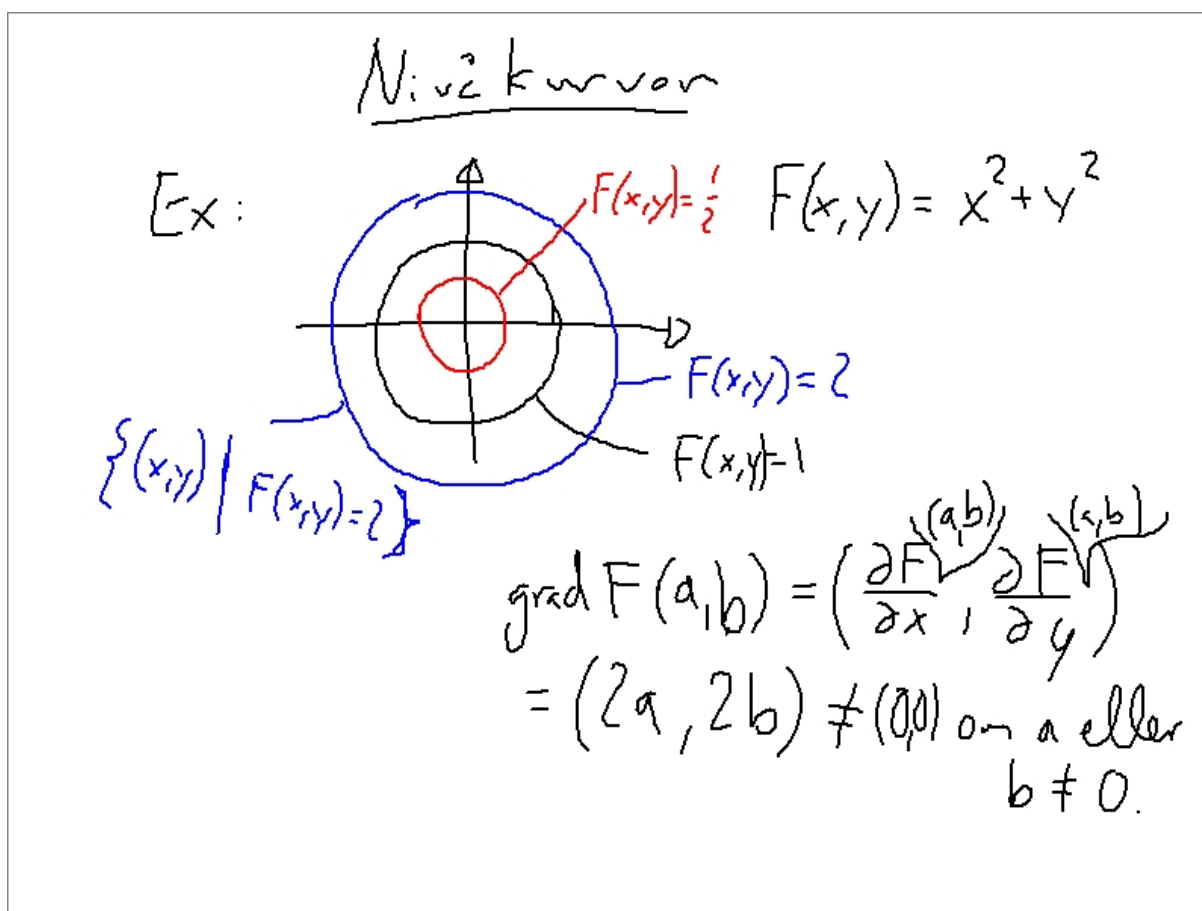
$$\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(3t^2, 2t)}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = \frac{t(3t, 2)}{|t|\sqrt{9t^2 + 4}}$$

gränsvärdet när $t \rightarrow 0$ saknas.
Singulariteten kallas äkta för den
gär inte att trolle bort.



Vi ser också att $y^3 = x^2$
 $\Rightarrow y = f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$
så f ej deriverbar när $x=0$.

Sats: Grafen för en funktion
 $y=f(x)$ är en reguljär kurva
om f har kontinuerlig derivata
i alla punkter.



Sats: Om en funktion F
av typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga
partiella derivator och

$$F(a,b) = C, \text{ grad } F(a,b) \neq (0,0)$$

så är nivåkurvan $F(x,y) = C$
en reguljär kurva nära punkten
 (a,b) .

bevis: Eftersom $\text{grad } F(a,b) \neq 0$
så är någon av de partiella
derivatorna $\neq 0$ där, säg $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0$.
Implicita funktionssatsen säger
då att nära (a,b) så är mängden
av punkter som ^{uppfyller} $F(x,y) = 0$, grafen
av en funktion $x = f(y)$. Enligt
föregående sats är den alltså en
reguljär kurva lokaltkring (a,b) .

$$\text{Ex: } F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\text{grad } F(x,y) = (2x, 2y)$$

Så $x^2 + y^2 = 1$ är en reguljär
kurva för $\text{grad } F \stackrel{(a,b)}{=} (0,0)$ bara
för $(a,b) = (0,0)$ och den punkten
ligger ej på cirkeln. Vi ser
också att $\text{grad } F \stackrel{(a,b)}{=}$ ger en
normalvektor till kurvan i punkten
 (a,b) .

Sats: Om $\text{grad } F(a,b) \neq (0,0)$
och $F(a,b)=C$ så är
 $\text{grad } F(a,b)$ en normalvektor
till nivåkurvan $F(x,y)=C$ i
punkten (a,b) .

Ex: Finn en normalvektor till linjen
 $2x + y = 3$. $G(x,y) = 2x + y - 3$, $G(x,y) = 0$

Lös: Vi sätter $F(x,y) = 2x + y$ så linjen
är nivåkurvan $F(x,y) = 3$. $\text{grad } F(x,y) = (2, 1)$

Ex: Låt $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$.

Bestäm tangenten till
kurvan i punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Lösning: Först måste vi bestämma punktens
parametervärde: $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$
dvs $t = \frac{\pi}{4}$. Så

$\vec{r}'(\frac{\pi}{4}) = (-\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
ger en tangentvektor, dvs en riktningsvektor
till tangenten. Tangentlinjen blir alltså
 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + t(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ex: Existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} ?$$

Lösning: Vi prövar först längs x-axeln

$$y=0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

längs y-axeln, dvs $x=0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Går vi längs linjen $y=kx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(1+k^2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+k^2} = 0$$

Vi misstänker att gränsvärdet blir noll men hur ska vi visa det? Vi inför polära koordinater $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{r^3 \cos^3 \varphi}{r^2} = r \cos^3 \varphi$$

men $|r \cos^3 \varphi| \leq r$ så

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{för } r \rightarrow 0 \quad \text{här } (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Så gränsvärdet existerar och är lika med 0.

Övn 3.4: Låt $f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2 - y)^2 + y^2}$.

Sätter vi $y = kx$ får vi:

$$\begin{aligned} f(x, kx) &= \frac{x^2 kx}{(x^2 - kx)^2 + (kx)^2} = \\ &= \frac{kx^3}{x^4 - 2kx^3 + k^2x^2 + k^2x^2} = \frac{kx}{x^2(x^2 - 2kx + 2k^2)} \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ när $x \rightarrow 0$

y-axeln:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{2y^2} = 0$$

Men

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x^2 - x^2)^2 + x^4} = 1$$

Gränsvärdet existerar alltså
ej!