

Ex: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & | & 3 \\ 3 & -2 & 3 & | & 9 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \boxed{-4} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -9 & | & -9 \\ 3 & -2 & 3 & | & 9 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \boxed{-3} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -9 & | & -9 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \boxed{\frac{1}{5}} \\ \boxed{\frac{1}{5}} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -9 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \boxed{1} \end{matrix}$$

Föreläsning 2, sid 2

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-1} \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-\frac{1}{9}} \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-1} \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ex: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 4 \\ 6x_1 + 10x_2 = 8 \end{cases}$$

Lösning: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & 4 \\ 6 & 10 & 0 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -4 \\ -6 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{-6}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2 \\ +2 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 2 \end{cases} \quad \text{saknar lösningar}$$

Ex: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Lösning: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\left[\frac{1}{2} \right]} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -3 \end{smallmatrix} \right]}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{33}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{2}{3} \end{smallmatrix} \right]} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right]}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{oändligt} \\ \text{många} \\ \text{lösningar} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (\text{parameter})$$

Gauss-Jordans metod

Tillåtna radoperationer

Op1: att ersätta en rad med
den raden + en multipel av
en annan rad.

Op2: att multiplicera en rad med
en konstant $\neq 0$

Op3: att byta plats på rader

V: börjar med ett allmänt system

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & | & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & | & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & | & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & | & * \end{pmatrix}$$

Om alla koefficienter: $VL = 0$
har vi två fall: lösningar saknas
om någon koefficient $\neq 0$; HL annars
är allt en lösning.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Låt oss nu anta att någon
koefficient är $\neq 0$.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \neq 0 & * & * & \dots & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{O_p 3} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{\frac{1}{k}}} O_p 2 \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & * \end{array} \right) \xrightarrow{O_p 1} \text{upprepade rader}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{array} \right)$$

Vi kan nu upprepa proceduren på det inrutade systemet.

Till slut får vi ett system på formen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{array}$$

System på
trappstegs-
form.

Poängen är att det är
lätt att läsa av lösningen
till ett sådant system.

Ex:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

↑ ↑ parametrar

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_3 = s \\ x_2 = 1 - 2s \\ x_4 = 3 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Föreläsning 2, sid 11

$$E_X: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-2} \quad \boxed{-3} \quad \boxed{-5} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & -20 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-\frac{1}{5}} \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & -20 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{4} \quad \boxed{10} \quad \boxed{20} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ex: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

↑

$$\begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = 3 - t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\text{Ex: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-4} \quad \boxed{-2} \\ \swarrow \quad \swarrow \\ \swarrow \quad \swarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{\frac{1}{5}} \\ \swarrow \quad \swarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \swarrow \quad \swarrow \\ \boxed{2} \quad \boxed{3} \\ \swarrow \quad \swarrow \end{array}$$

Föreläsning 2, sid 13

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

↑

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + t \\ x_2 &= 4 - 2t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Ex: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & a & 0 \end{array} \right)$

$\begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 1 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array}$

Föreläsning 2, sid 14

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & a+2 & 3 \end{array} \right) \boxed{-\frac{1}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 7 & a+2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-3} \quad \boxed{-7} \\ \boxed{-7} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{array} \right)$$

Om $a=1$ saknas lösningar.

Om $a \neq 1$ kan vi dela med $a-1$.

Föreläsning 2, sid 15

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} \end{array} \right) \begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{\frac{3}{2}} \quad \boxed{-\frac{5}{2}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{7} + \frac{5}{2} \frac{1}{(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{7} + \frac{3}{2} \frac{1}{(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{9}{7} + \frac{5}{2} \frac{1}{(a-1)} \\ X_2 = \frac{4}{7} + \frac{3}{2} \frac{1}{(a-1)} \\ X_3 = -\frac{1}{a-1} \end{array} \right.$$