Ytor

Precis som en kurva lokalt är värdemängden till en funktion av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definierad på ett intervall kan ytor i $\mathbb{R}^3$ lokalt ses som värdemängden till en funktion av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definierad på en rektangel.

Ex 6.13b) Funktionen

$$\vec{f}: \begin{cases} x = \cos\varphi \sin\theta \\ y = \sin\varphi \sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

har som värdemängd enhetssfären,

$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

$$\cos^2\varphi \underbrace{\sin^2\theta + \sin^2}_{\sin^2\theta}\varphi \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Som för kurvor vill vi också definiera reguljära ytor.
En kurva är reguljär i en punkt om den har en väldefinierad tangentvektor i punkten. Motsvarande skulle vi vilja att en reguljär yta har tangentplan. Om ytstycket definieras av en funktion $\vec{r}(u,v)$ så är det intuitivt

Klart att $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ger vektorer som tangerar ytan.

Vi kan så få en normalvektor till tangentplanet genom att ta

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

<u>Def</u>: Ett reguljärt ytstycke i $\mathbb{R}^3$ är värdemängden till en funktion $\vec{r}(u,v)$ av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definierad på en rektangel, $D = \{a < u < b, c < v < d\}$,

sådan att $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$ för alla $(u,v) \in D$. Planet genom punkten $\vec{r}(u,v)$ med normal $\vec{n}$ är ytans tangentplan i punkten $\vec{r}(u,v)$. En delmängd till $\mathbb{R}^3$ som lokalt är ett reguljärt ytstycke kallas en reguljär yta.

Ex: $\vec{r}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

definierad på $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

Vi har att

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi \sin\theta, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos\varphi \cos\theta, \sin\varphi \cos\theta, -\sin\theta)$$

så

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi \sin\theta & 0 \\ \cos\varphi \cos\theta & \sin\varphi \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} =$$

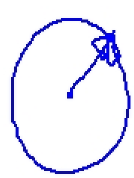
$$= \left(\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(-\sin^2\theta\cos\varphi, \; -\sin^2\theta\sin\varphi, \; -\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \right.$$

$$\left. - \cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta \right) = \left(-\sin^2\theta\cos\varphi, -\sin^2\theta\sin\varphi, \right.$$

$$\left. -\sin\theta\cos\theta \right) = -\sin\theta\,\vec{r}(\varphi,\theta).$$



Så länge $\theta \neq 0, \pi$ får vi $\vec{n} \neq 0$, vilket visar att enhetssfären är reguljär utom möjligtvis i punkterna $(0,0,\pm 1)$. Men det är lätt att se att den är reguljär även där genom att välja en annan parametrisering, tex

$$(\cos\varphi \sin\theta, \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta).$$

Vi har också $\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\vec{r}(\varphi,\theta)$.

Sats: Låt f vara en funktion av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad på en rektangel D. Då är grafen $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ en reguljär yta om f har kontinuerliga partiella derivator i alla punkter i D.

bevis: Vi kan parameterframställa grafen som $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

Vi får $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

och $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} =$

$= \left(\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \neq \vec{0}$

Så ytan är reguljär.

Tangentplanet i $(a, b, f(a,b))$ blir

så $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

$$0 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), 1\right) \cdot \left(x-a, y-b, z-f(a,b)\right) =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + 1 \cdot (z - f(a,b))$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Ex: Vi har sett att enhetssfären
$x^2+y^2+z^2=1$ är en reguljär yta
genom att betrakta olika
parameterframställningar.
Man kan också se det genom
att ta gradienten. Låt

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

då blir enhetssfären nivåytan

$$F(x,y,z)=1.$$

Vi har att

$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) =$$

$$= (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$$

eftersom $(2x, 2y, 2z) = (0,0,0)$ bara för $(x,y,z) = (0,0,0)$ men $(0,0,0)$ ligger ej på sfären. Så

$$\operatorname{grad} F(a,b,c)$$

är en normalvektor i (a,b,c).

Sats. Om $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten (a,b,c) och $F(a,b,c) = C$ och $\operatorname{grad} F(a,b,c) \neq (0,0,0)$, så är mängden $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = C\}$ ett reguljärt ytstycke lokalt kring punkten (a,b,c).
Vidare gäller det att $\operatorname{grad} F(a,b,c)$ är normalvektor till ytan i punkten.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

x^2+y^2

$AC-B^2=1$

$$AC - B^2 > 0$$

xy

$AC-B^2=-\frac{1}{4}$

$$AC - B^2 < 0$$

$x^2+2xy+y^2$

$AC-B^2=0$

$$AC - B^2 = 0$$

Övn 606: Låt O vara origo och P en godtycklig punkt på kurvan

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ z = 1 \end{cases}.$$

Visa att vinkeln mellan vektorn OP och tangenten i punkten P är oberoende av P:s läge på kurvan. Bestäm också vinkeln.

$$\vec{OP_t} = \vec{r}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$$

Tangentvektor

$$\frac{d}{dt}\frac{f}{g}(t) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{2(1+t^2) - 2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}, \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}, \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, 0\right)$$

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\right) + \frac{(1-t^2)(-4t)}{(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{4t - 4t^3 - 4t + 4t^3}{(1+t^2)^3} = 0$$