

Differentierbarhet

Precis som i en variabel
är en differentierbar funktion
i flera variabler kontinuerlig:

$$\begin{aligned}\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x} + \vec{h}) &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) + \underbrace{A\vec{h}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{R(\vec{x}, \vec{h})}_{\rightarrow 0} |\vec{h}| \\ &= f(\vec{x})\end{aligned}$$

vi har också sett att en differentierbar funktion har partiella derivator men till skillnad från envariabel-fallet är det inte sant att en funktion som har partiella derivator är differentierbar.

$$\text{Ex 4.11)} \quad \text{Låt } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De partiella derivatorna existerar
i origo för

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\text{och } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

men funktionen är ej differentierbar
i origo, i själva verket är den inte ens
kontinuerlig där.

Om vi går längs linjen $y=kx$
får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

som inte är $0 = f(0,0)$.

Vi har dock

Sats: Om alla partiella derivator
till $\vec{f}(\vec{x})$ är kontinuerliga i en
omgivning av en punkt, så är
 $\vec{f}(\vec{x})$ differentierbar i punkten.

Kedjeregeln

I en variabel gäller att om $h(x) = f(g(x))$ så blir $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$, motsvarande gäller även i flera variabler.

Sats: Låt $\vec{f}(\vec{t})$ vara en funktion av typ $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $\vec{g}(\vec{x})$ en av typ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ så att $V_{\vec{g}} \subseteq D_{\vec{f}}$. Sätt $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$.

Då gäller

$$J_{\vec{h}}(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot J_{\vec{g}}(\vec{x})$$

Ex: $n=p=m=1$ ger vanliga kedjeregeln.

Ex: $n=m=1, p=2$. $\vec{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Låt $\vec{g}(t) = (g_1(t), g_2(t))$ för v.

$$h'(t) = \text{grad} f(g_1(t), g_2(t)) \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ans} \\ h'(t) &= \frac{d}{dt} f(g_1(t), g_2(t)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t)) g_2'(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \vec{g}(t) &= (\cos t, \sin t), \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \\ h(t) &= f(\vec{g}(t)) = f(\cos t, \sin t) = \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \end{aligned}$$

$$0 = h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{g}(t))(-\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{g}(t)) \cos t =$$

$$= 2 \cos t (-\sin t) + 2 \sin t \cos t = 0$$

Ex (bevis av satsen om normalvektor
till nivåkurvor)

Vi har sett tidigare att en nivå-
kurva $F(x,y) = C$ med $\text{grad } F \neq 0$
ges som värde mångden till en
parameterkurva, så $F(\vec{r}(t)) = C$.
Derivering ger

$$0 = \text{grad } F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \quad \text{men}$$

$\vec{r}'(t)$ är en tangentvektor
så $\text{grad } F \perp \vec{r}'(t) \Rightarrow \text{grad } F(\vec{r}(t))$
är en normal.

Ex: Antag att $\vec{r}(u,v)$ definierar
ett ytestycke i $\mathbb{R}^3$ och betrakta
en reguljär kurva på ytan

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)).$$

Kurvans tangentvektor i punkten
 $\vec{R}(0)$ blir

$$\begin{aligned} \vec{R}'(0) &= \mathcal{J}_{\vec{r}}^{3 \times 2}(u(0), v(0)) \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$

$\vec{r} = (x, y, z), \begin{pmatrix} \text{grad } x \\ \text{grad } y \\ \text{grad } z \end{pmatrix}$

$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} v'(0)$$

Så tangentvektorn är en linjärkombination av $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Vektorerna $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ spänner
alltså upp tangentplanet och
vi ser att $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ger
en normalvektor till ytan.

Riktningderivator

Def: Om $\vec{n} = (a, b)$ är en enhetsvektor säger vi att

$(f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$

$$f'_{\vec{n}}(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+at, y+bt) - f(x, y)}{t} =$$
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{n}) - f(\vec{x})}{t}$$

är funktionens riktningderivata i riktningen $\vec{n}$.

Vi ser att riktningsderivatan
i riktning $(1,0)$ är precis
 $\frac{\partial f}{\partial x}$ och riktningsderivatan i
riktning $(0,1)$ är precis $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Det visar sig att man lätt
får riktningsderivatan från
de partiella derivatorna. Vi har
nämligen att

Sats: Om f är differentierbar
i punkten (x, y) så är

$$f'_{\vec{n}}(x, y) = a \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \\ = \text{grad } f(x, y) \cdot \vec{n}$$

bevis: riktningsderivatan är ju

$$\left. \frac{d}{dt} f(\vec{r} + t\vec{n}) \right|_{t=0} \text{ så kedjeregeln}$$

$$\text{ger } \left. \frac{d}{dt} f(\underbrace{\vec{r} + t\vec{n}}_{\vec{g}(t)}) \right|_{t=0} = \text{grad } f(\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\vec{g}'(t)}$$

$$f'_{\vec{n}}(\vec{r}) = \text{grad } f(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \\ = |\text{grad } f(\vec{r})| \underbrace{|\vec{n}|}_{=1} \cos \varphi$$

maximal när $\varphi = 0$, dvs
när $\vec{n} \parallel \text{grad } f(\vec{r})$. Alltså

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } f(\vec{r})}{|\text{grad } f(\vec{r})|}$$

och pekar i samma
riktning

Riktningssderivatan i den riktningen
blir $\text{grad } f(\vec{r}) \cdot \frac{\text{grad } f(\vec{r})}{|\text{grad } f(\vec{r})|} = |\text{grad } f(\vec{r})|$

442: Bestäm riktningsderivatan
 av funktionen $f(x,y,z) = \sin xy + \tan yz$
 i punkten $(0, \frac{\pi}{4}, 1)$ i riktning mot
 $(2, \frac{\pi}{2}, 0)$.

Lösning: 

$$\vec{V} = (2, \frac{\pi}{2}, 0) - (0, \frac{\pi}{4}, 1) = (2, \frac{\pi}{4}, -1)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{(2, \frac{\pi}{4}, -1)}{\sqrt{4 + \frac{\pi^2}{16} + 1}} = \frac{(2, \frac{\pi}{4}, -1)}{\sqrt{5 + \frac{\pi^2}{16}}}$$

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left(y \cos xy, x \cos xy + z(1 + \tan^2 yz), \right. \\ &\quad \left. y(1 + \tan^2 yz) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{grad } f\left(0, \frac{\pi}{4}, 1\right) &= \left(\frac{\pi}{4}, 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4}, 2, \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}'_{\vec{n}} &= \text{grad } f\left(0, \frac{\pi}{4}, 1\right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{\pi}{4}, 2, \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(2, \frac{\pi}{4}, -1 \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{5 + \frac{\pi^2}{16}}}\end{aligned}$$