Inversa funktioner

En funktion är ju inverterbar om den är injektiv, dvs om varje punkt i värdemängden svarar mot precis en punkt i definitionsmängden. Det är naturligt att fråga efter villkor för att inversen ska vara differentierbar.

I en variabel har vi

<u>Sats</u>: En kontinuerligt deriverbar funktion f av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad i en omgivning av punkten $x=a$, har en deriverbar invers i en omgivning av punkten $y=b=f(a)$ om och endast om

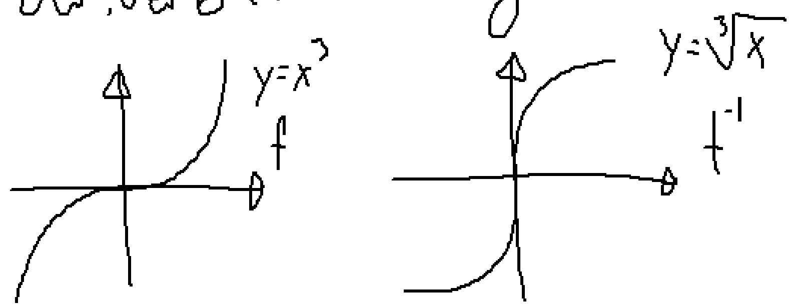
$$f'(a) \neq 0.$$

Ex 5.1: funktionen $y = f(x) = x^3$ är inverterbar $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Men $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$

och $\dfrac{df^{-1}}{dy} = \dfrac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$ så f^{-1} är

ej deriverbar i origo.



Om funktionen har en deriverbar invers följer det direkt från kedjeregeln att då

$$y = f \cdot f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) \quad \text{så} \quad 1 = \underbrace{f'(f^{-1}(y))}_{\text{yttre}}\underbrace{(f^{-1})'(y)}_{\text{inre}}$$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ex: $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{3(f^{-1}(y))^2} = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2}$

Eftersom vi ej kan dela med 0 så är det klart att $f'(a)$ måste antas $\neq 0$.

På samma sätt har vi att om $\vec{f}(\vec{x})$ är en differentierbar funktion av typ $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$, definierad i en omgivning av punkten $\vec{x} = \vec{a}$, som har en differentierbar invers i en omgivning av punkten $\vec{y} = \vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ så ger kedjeregeln som förut

$$\vec{y} = \vec{f} \circ \vec{f}^{-1}(\vec{y}) \text{ ger } E = J_{\vec{f}}(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))\, J_{\vec{f}^{-1}}(\vec{y})$$

$$\Rightarrow J_{\vec{f}^{-1}}(y) = J_{\vec{f}}(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))^{-1}$$

Koordinattransformationer:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vi ser alltså att ett nödvändigt krav för att en funktion ska ha en differentierbar invers är att matrisen $J_{\vec{f}}(\vec{a})$ är inverterbar, dvs $\det J_{\vec{f}}(\vec{a}) \neq 0$.

För att förstå att detta också är tillräckligt ska vi använda att en differentierbar funktion väsentligen är linjär.

Om $\vec{f}$ är en differentierbar funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så gäller

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$$

dvs
$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) \approx J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$$

Om nu $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ och $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ får vi

$$\vec{y} - \vec{b} \approx J_{\vec{f}}(\vec{a})\left(\vec{f}^{-1}(\vec{y}) - \vec{f}^{-1}(\vec{b})\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{f}^{-1}(\vec{y}) - \vec{f}^{-1}(\vec{b}) \approx J_{\vec{f}}(\vec{a})^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{f}^{-1}(\vec{y}) \approx \vec{f}^{-1}(\vec{b}) + J_{\vec{f}}(\vec{a})^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$$

dvs funktionen $\vec{f}^{-1}(\vec{y})$ är också väsentligen linjär. Alltså den är differentierbar. Det här är förstås bara en skiss men vi får i alla fall följande sats:

Sats: En funktion $\vec{f}$ av typ $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ som är differentierbar i en omgivning av punkten $\vec{x} = \vec{a}$ har en differentierbar invers i en omgivning av $\vec{y} = \vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ om och endast om

$$\det J_{\vec{f}}(\vec{a}) \neq 0,$$

dvs om $J_{\vec{f}}(\vec{a})$ är inverterbar.

Ex: $n=1$, $J_f = (f')$ så $\det J_f(a) = f'(a)$.

Ex: $\vec{f}$ linjär: $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$ A $n \times n$ matris

$J_{\vec{f}} = A$ $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}$

$\det A \neq 0$

Ex: $T: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $J_T(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ $\det J_T(r,\varphi) = r \neq 0$ om $r > 0$

så koordinattransformationen har en differentierbar invers lokalt uton kring punkten $(x,y)=(0,0)$.

(OBS! $T(1,0) = T(1,2\pi) = (1,0)$ så det finns inte någon global invers)

Ex: En lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ e^x + \sin y = 2 \end{cases}$$

är $(0,\frac{\pi}{2})$. Visa att det nära den punkten ej, finns någon annan lösning.

Lösn: Vi bildar $F(x,y) = (\sin x + \cos y,\ e^x + \sin y)$.

Vi har alltså $F(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 2)$ och vi vill visa att F är inverterbar nära den punkten. Vi testar

$$\det J_F(0, \tfrac{\pi}{2}) = \det \begin{pmatrix} \cos x & -\sin y \\ e^x & \cos y \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Därmed är funktionen inverterbar nära den punkten vilket ger att $(0, \frac{\pi}{2})$ är enda lösningen i någon omgivning kring $(0, \frac{\pi}{2})$.

Övn 461 a) Transformera följande uttryck med angivet variabelbyte

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad T: \begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$$

Lösn:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{J_z(x,y) = \text{grad}\, z(x,y)} = \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)}_{\text{grad}\, z(u,v)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}_{J_{T^{-1}}}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$T: \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} u = \frac{1}{2}(x+y) \\ v = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$