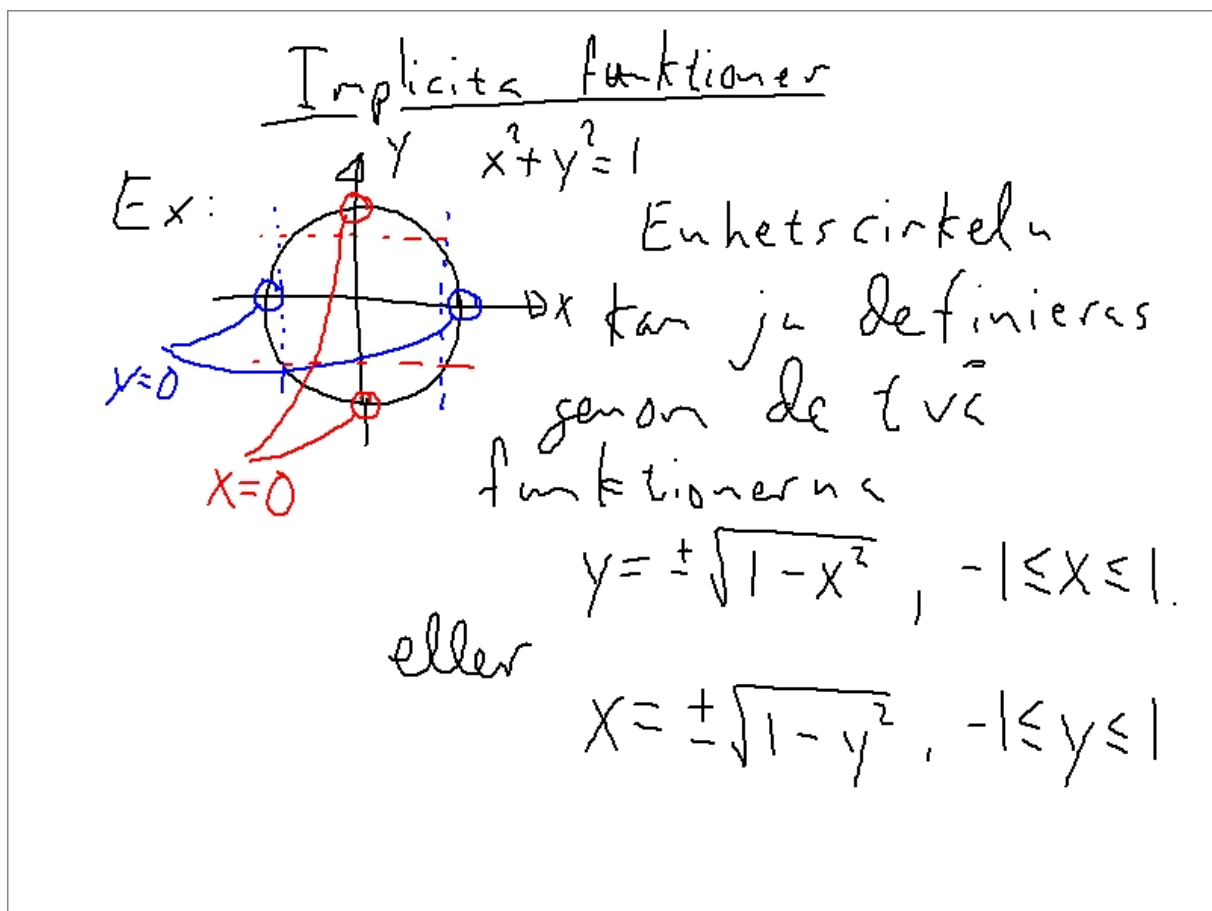




Om vi vill ha deriverbara funktioner behöver vi alla fyra för tex $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ är ej deriverbar i $x = \pm 1$.

Vi kan se det direkt från ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ för om vi deriverar med avseende på x får vi $2x$ som är $\neq 0$ bara för $x \neq 0$, motsvarande ger derivering med y

$2y$ som $\bar{z} = 0$ om $y = 0$.
Implicita funktionsatsen säger
här för att x kan lösas
ut som en deriverbar funktion
av y om $x \neq 0$, dvs $y \neq \pm 1$
och att y kan lösas ut som
en deriverbar funktion av x
när $y \neq 0$, dvs $x \neq \pm 1$.

I flera variabler gäller samma sak:

Sats: Låt $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$ vara en
 differentierbar funktion av
 typ $\mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ och sätt
 $\vec{H}_{\vec{x}_0}(\vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y})$. (i boken $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} = \vec{J}_{\vec{H}_{\vec{x}_0}}$)
 Antag att $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ och
 $\det \vec{J}_{\vec{H}_{\vec{x}_0}}(\vec{y}_0) \neq 0$

då finns i en omgivning
 av punkten $x = x_0$ precis
 en differentierbar funktion
 $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ så att
 $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$ och $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$.

Ex: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, typ $\mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$H_{x_0}(y) = F(x_0, y) = x_0^2 + y^2 - 1.$$

$$\det(H'_{x_0}) = \det J_{H_{x_0}}(y) = H'_{x_0}(y) = 2y \neq 0 \text{ om } y \neq 0.$$

$$\text{Ex: } F(\underline{x}, \underline{y}, z) = xyz - 1.$$

$$F \text{ är av typ } \mathbb{R}^{2+1} = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$\text{så } m=2, n=1$$

Vi vill alltså lösa ut z som funktion av x och y .

$$\text{Låt } H_{(x_0, y_0)}(z) = x_0 y_0 z - 1$$

da får vi

$$\det J_{H_{(x,y)}}(z) = H'_{(x,y)}(z) = xy \neq 0$$

om x och $y \neq 0$.

Men $x=0$ eller $y=0$
 ger $F(x,y,z) = -1 \neq 0$
 så vi kan lösa ut
 z som en funktion av
 x och y överallt på ytan
 $\rightarrow xyz=1$. $\frac{\partial}{\partial x}(xyz(x,y)) =$
 Vi har också $yz(x,y) + xy \frac{\partial z}{\partial x}$
 $yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy} = -\frac{z}{x}$
 $xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy} = -\frac{z}{y}$

Ex: Inversen $\vec{y} = \vec{f}^{-1}(\vec{x})$ är
lösningen till ekvationen
 $\vec{x} - \vec{f}(\vec{y}) = \vec{0}$.

Sätt $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} - \vec{f}(\vec{y})$ och
 $\vec{H}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \vec{x} - \vec{f}(\vec{y})$.

Vi får

$$\det \vec{J}_{\vec{H}_{\vec{x}}}(\vec{y}) = \det \vec{J}_{\vec{f}}(\vec{y})$$

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$$

så under förutsättning
att $\det J_{\vec{F}}(\vec{y}) \neq 0$, $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}) = \vec{0}$

kan vi lösa ut $\vec{y}$ som en
differentierbar funktion av $\vec{x}$,
Så vi får tillbaka satser
för inversa funktioner.

bevis av satsen: Låt $\vec{G}: \begin{cases} \vec{u} = \vec{x} \\ \vec{v} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \end{cases}$

Ans $\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \vec{G}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}.$

Eftersom $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ och $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n$
så $\vec{G}$ blir en funktion av typ
 $\mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$. Om nu

$$\det J_{\vec{G}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$$

vet vi att $\vec{G}$ har en
differentierbar invers, i en
omgivning av punkten.

$$\vec{G}^{-1}: \begin{cases} \vec{x} = \vec{x}(\vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{y} = \vec{y}(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases} = \begin{cases} \vec{x} = \vec{u} \\ \vec{y} = \vec{y}(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

Så observerar vi att $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$
svaret mot $\vec{v} = \vec{0}$. För sådana
punkter har vi

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} = \vec{G}(\vec{u}, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{y}(\vec{u}, \vec{0}) \end{pmatrix}$$

men då $\vec{x} = \vec{u}$ blir ju

$$\vec{y}(\vec{u}, \vec{0}) = \vec{f}(\vec{x}).$$

Det återstår att tolka villkoret $\det J_{\vec{G}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$.

Låt $H_{\vec{x}_0}(\vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y})$ och $\vec{I}_{\vec{y}_0}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_0)$ då blir

$$J_{\vec{G}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ J_{\vec{I}_{\vec{y}_0}}(\vec{x}_0) & J_{H_{\vec{x}_0}}(\vec{y}_0) \end{pmatrix}$$

$$\text{så } \det J_{\vec{G}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \det J_{H_{\vec{x}_0}}(\vec{y}_0).$$

vilket är villkoret i satsen.

$$\begin{aligned} \text{Eftersom } \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) &= \vec{0} \text{ får vi} \\ \underbrace{J_{\vec{F}}(\vec{x}_0)}_{\text{yz } \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}} + \underbrace{J_{H_{\vec{x}_0}}(\vec{y}_0)}_{\text{xy } \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}} \cdot \underbrace{J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)}_{\text{xz } \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{alltså } J_{\vec{f}}(\vec{x}_0) = -J_{H_{\vec{x}_0}}(\vec{y}_0)^{-1} J_{\vec{F}}(\vec{x}_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } xyz &= 1. \quad F(x, y, z) = xyz - 1 \\ F(x, y, z) &= 0. \quad \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

$$I_z(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_{(x,y)}(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} J_{I_z}(x, y) &= \text{grad } I_z = \left(\frac{\partial I_z}{\partial x}, \frac{\partial I_z}{\partial y} \right) = \\ &= (yz, xz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{H_{(x,y)}}(\bar{z}) &= H'_{(x,y)}(\bar{z}) = (X \ Y) \\
 (X \ Y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/y \end{pmatrix} &= (1) \\
 \mathcal{J}_{\bar{z}}(x,y) &= \text{grad } \bar{z}(x,y) = \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right) \\
 \text{så} \quad \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{xy} (y\bar{z}, x\bar{z}) = \\
 &= \left(-\frac{\bar{z}}{x}, -\frac{\bar{z}}{y} \right)
 \end{aligned}$$

Ex: Ekvationerna
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

definierar en kurva.

Låt $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z)$
så ekvationssystemet svarar
precis mot $F(x, y, z) = (0, 0)$.

$$F: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

vi vill lösa ut x och y som
funktioner av z , (implicit)

$$H_{z_0}(x, y) = F(x, y, z_0)$$

I punkten $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
har vi

$$\det J_{H_z}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{(0, \frac{1}{\sqrt{2}})} =$$
$$= \det \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \neq 0$$

Så i en omgivning av punkten

kan vi lösa ut x och y
som funktioner av z ;
 $x = f(z)$, $y = g(z)$.

Vi har också $\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$$\begin{pmatrix} f'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ g'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \cdot z = 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ -\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Övn 518: En yta definieras
genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$.
Visa att det finns en omgivning
av punkten $(1, 3, 2)$, där ytan
kan uppfattas som en graf
till en kontinuerligt deriverbar
funktion $z = z(x, y)$.
Bestäm z'_x och z'_y i punkten
 $(1, 3)$.

$$F(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 10$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$\begin{aligned} H_{(1,3)}(z) &= 3 \cdot 1 \cdot 3z - z^3 - 10 \\ &= 9z - z^3 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det J_{H_{(1,3)}}(2) &= H'_{(1,3)}(2) = 9 - 3z^2 \Big|_{z=2} \\ &= 9 - 12 = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Så vi kan lösa ut z som funktion av (x, y) när vi punkten $(1, 3, 2)$.

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(3xyz - z^3 - 10) = 3yz + 3xy z'_x - 3z^2 z'_x$$

Vi kan lösa ut

$$z'_x = \frac{-3yz}{3xy - 3z^2}$$

lika dant

för $z'_y(1, 3)$

$$z'_x(1, 3) = \frac{-3 \cdot 3 \cdot z(1, 3)}{3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot z^2(1, 3)} = \frac{-9 \cdot 2}{9 - 3 \cdot 4}$$

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\perp_{\text{rot}} (2, -1)$

$$= - \frac{\partial z}{\partial v}$$

$\Rightarrow z$ beror bara av u