+§

Taylors formel

Sats: Låt $f(x,y)$ vara en funktion av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med kontinuerliga partiella derivator av ordning upp till $n+1$ i en omgivning av punkten (x,y) då är

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) + \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) + R_{n+1}(h,k)$$

$$R_{n+1}(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\tau h, y+\tau k)$$

där $0<\tau<1$.

Anm: Motsvarande gäller för funktioner av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

bevis: Låt $\varphi(t) = f(x+th, y+th) \left(= f(\vec{x}+t\vec{h})\right)$

MacLaurinutveckling av φ ger

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

$0<\tau<t$. Sätt $t=1$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \quad 0<\tau<1$$

$$\varphi'(0) = \operatorname{grad} f(x,y) \cdot (h,k)$$

$$= h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

så $\varphi^{(n)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$.

Vi får alltså precis det vi ville ha.

Ex: Utvecklingen kring $(x,y)=(0,0)$ kallas även här för MacLaurinutveckling.

Låt $f(x,y) = e^{3x-2y}$ det ger

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} = 3hf - 2kf = (3h-2k)f$$

så vi får direkt

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = (3h-2k)^2 f$$

$$=(9h^2-12hk+4k^2)f$$

och mer allmänt

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i (-2)^{n-i} h^i k^{n-i}\right) f$$

så andra ordningens utveckling blir

$$e^{3h-2k} = 1+3h-2k+\frac{1}{2}(9h^2-12hk+4k^2)+$$

$$+\frac{1}{3!}(27h^3-54h^2k+36hk^2-8k^3)\,e^{\tau(3h-2k)}$$

Vi kan avläsa att

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (3,-2)$$

och om vi inför den så kallade Hessematrisen

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

får vi

$$e^{3h-2k} = f(0,0) + \operatorname{grad} f(0,0) \cdot (h,k) + \frac{1}{2}(h,k) H_f(0,0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R_3(h,k).$$

Ordo

Ett polynom kallas homogent om alla termer har samma grad, t ex $9h^2-12hk+4k^2$ är homogent men $1+3h-2k$ är inte homogent.

Sats: Om $p(h,k)$ är ett homogent polynom av grad n så är

$$p(h,k)=\mathcal{O}\left(|(h,k)|^n\right)=\mathcal{O}\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n\right)$$

men $\neq \mathcal{O}\left(|(h,k)|^a\right)$ $a>n$, då $(h,k)\to(0,0)$.

I exemplet

$$e^{3h-2k} = 1 + 3h - 2k + \frac{1}{2}\left(9h^2 - 12hk + 4k^2\right) + O\left(|(h,k)|^3\right)$$

Precis som i en variabel är utvecklingen unik i meningen

Sats: Om f har kontinuerliga derivator av minst ordning $n+1$ i en omgivning av punkten (x,y) och

$$f(x+h, y+k) = p_n(h,k) + O\left(|(h,k)|^{n+1}\right), \quad (h,k) \to (0,0)$$

så är $p_n(h,k)$ Taylorpolynomet av grad n.

Tack vare den här satsen kan vi använda envariabelutvecklingar.
I vårt exempel e^{3x-2y} får vi

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

$t = 3x-2y$

$$e^{3x-2y} = 1 + (3x-2y) + \frac{(3x-2y)^2}{2} + O\left((3x-2y)^3\right)$$

$$= 1 + 3x - 2y + \frac{1}{2}\left(9x^2 - 12xy + 4y^2\right) + O\left(|(x,y)|^3\right)$$

Ex: Vi vill Taylorutveckla funktionen $\sin(x^2-y^2)$ till tredje ordningen kring punkten $(1,1)$. Vi sätter först $x=1+h$, $y=1+k$

$$\sin(x^2-y^2)=\sin\left((1+h)^2-(1+k)^2\right)=$$

$$=\sin\left(2h+h^2-2k-k^2\right)$$

det viktiga är nu att när $(x,y)\to(1,1)$ går $2h+h^2-2k-k^2$ mot 0.

MacLaurinutveckling av sin

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + O(t^5)$$

så

$$\sin(h^2+2h-2k-k^2) =$$

$$(h^2+2h-2k-k^2) - \frac{(h^2+2h-2k-k^2)^3}{3!} + O(\|(h,k)\|^5)$$

$$= 2h-2k+h^2-k^2 - \frac{8h^3}{3!} + \frac{8k^3}{3!} + \frac{24}{3!}h^2k - \frac{24hk^2}{3!} +$$

$$+ O(\|(h,k)\|^4)$$

det återstår nu att sätta tillbaks x,y

$$= 2(\overset{h}{x-1}) - 2(\overset{k}{y-1}) + (x-1)^2 - (y-1)^2 -$$

$$- \frac{8}{3!}(x-1)^3 + \frac{8}{3!}(y-1)^3 + \frac{24}{3!}(x-1)^2(y-1) -$$

$$- \frac{24}{3!}(x-1)(y-1)^2 + O\left(|(x-1, y-1)|^4\right)$$

Vi kan nu läsa av tex att

om $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) = -8, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3} = 8, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2 \partial y} = 24, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x \partial y^2} = -24$$