

Extrempunkter - öppna mängder

Antag att punkten (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt till funktionen $f(x, y)$ i den öppna mängden D och låt $g_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ och $h_{y_0}(x) = f(x, y_0)$. Då blir y_0 en lokal extrempunkt för g_{x_0} och x_0 en lokal extrempunkt för h_{y_0} .

Envariabel teorin säger nu att

$$g'_{x_0}(y_0) = 0 \text{ och } h'_{y_0}(x_0) = 0.$$

om derivatorna existerar.

Men
$$g'_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$h'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

så
$$\text{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

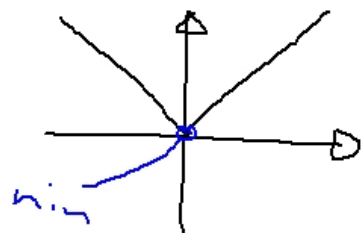
Sats (nödvändigt villkor för lokala
extrempunkter)

Om (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt
för $f(x, y)$ i en öppen mängd,
så gäller att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

eller så är f ej deriverbar i
punkten.

Ex: $f(x) = |x|$



$$x > 0 \quad f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

$$x < 0 \quad f(x) = -x$$

$$f'(x) = -1$$

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} = -1$$

Punkter där $\text{grad } f = \vec{0}$ kallas stationära eller kritiska punkter. Precis som i en variabel kan vi använda andra derivator för att bestämma punktens karaktär. Vi antar att funktionen har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning 3.

Enligt satsen är så
 $\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$

och vi får så

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) (x - x_0)(y - y_0) + \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) (y - y_0)^2 \right) + O(\|(x - x_0, y - y_0)\|^3) \end{aligned}$$

eller med Hessematrix

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$+ O(|(x-x_0, y-y_0)|^3)$$

$$P_2(x-x_0, y-y_0) = A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2$$

Andra grads ytor:

$AC - B^2 > 0$ elliptisk
paraboloid



$AC - B^2 < 0$ hyperbolisk
paraboloid



$AC - B^2 = 0$ parabolisk
cylinder



Taylor approximationen visar att ytans utseende bestäms av andragsgradstermen:

Sats: (tillräckliga villkor för extrempunkt)

Om (x_0, y_0) är en kritisk punkt till funktionen $f(x, y)$ och andragsgradstermen i Taylorpolynomet

$$P_2(x-x_0, y-y_0) = A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2$$

uppfyller

$AC - B^2 > 0$ och $A > 0$
 $\Rightarrow$ strängt minimum

$AC - B^2 > 0$ och $A < 0$
 $\Rightarrow$ strängt maximum

$AC - B^2 < 0$
 $\Rightarrow$ ingen extrempunkt
(sadelpunkt)

OBS! Hessematrisen $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ så $\det H = AC - B^2$

Om $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ och $A > 0$
säger vi att $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ är positivt
definit.

Om $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ men $A < 0$
säger vi att $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ är negativt
definit.

pos definit $\Rightarrow$ lokalt min

neg definit $\Rightarrow$ lokalt max

Ex: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

Lös: Funktionen har kontinuerliga derivator så vi börjar med att bestämma de kritiska punkterna.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cos(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cos(x^2+y^2)$$

$$\text{Så } \operatorname{grad} f(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{eller } \cos(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Andre derivator

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2)$$

$$(0,0): \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\text{och } 2 > 0$$

$\Rightarrow$ positivt definit

$\Rightarrow$ lokalt minimum.

$$x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi :$$

$$H = \begin{pmatrix} -4x^2(-1)^n & -4xy(-1)^n \\ -4xy(-1)^n & -4y^2(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\det H = \begin{vmatrix} -4x^2(-1)^n & -4xy(-1)^n \\ -4xy(-1)^n & -4y^2(-1)^n \end{vmatrix} = (-4x^2(-1)^n)(-4y^2(-1)^n) - (-4xy(-1)^n)^2 = 0$$

osäkert.

Ex: Bestäm alla lokala
extrempunkter till

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Lösning: Funktionen är kontinuerligt
deriverbar så vi börjar med
att bestämma kritiska punkter.

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\Rightarrow \text{grad } f(x, y, z) = \vec{0} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

är kritiska punkten

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \bigg|_{(x,y,z)=(0,0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad 2 > 0$$

positivt definit $\Rightarrow$ lokalt minimum