

minnes regel

positivt def - fungerar som en diagonal-
matrix med diagonalelement > 0

negativt def - som en diagonalmatrix
med diagonalelement < 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot 1 > 0 \quad 1 \cdot 2 > 0$$

pos def

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot 1 > 0 \quad 1 \cdot (-2) < 0$$

neg def

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

antar $A \neq 0$. Vi kvadratkompletterar

$$A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)y^2 \quad (*)$$

$$= A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{1}{A}(AC - B^2)y^2$$

$=0$ om $x + \frac{B}{A}y = 0$ ser ick

$AC - B^2$ positiv $\Rightarrow$ ser summa tecken negativ

$(*)$ är positivt definit om $=0$ bara $x=y=0$.

Summan av två kvadrater ≥ 0 och $=0$ bara om bägge kvadraterna $=0 \Rightarrow y=0, x=0$.

Föreläsning 29, sid 3

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right|$$

$$1. | > 0 \quad 2. | > 0 \quad 3. | > 0$$

pos def

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right|$$

$$1. | < 0 \quad 2. | > 0 \quad 3. | < 0$$

neg def

B villkor i form av olikheter

Ex: Låt $f(x,y) = 3x - y$, dvs nivåkurvorna för f är linjer med normal $(3, -1)$, och bestäm max och min för f på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Lösni: Då cirkeln ej är en öppen mängd kan vi inte använda kritiska punkter.

Lösning: Vi parametriserar först cirkeln som $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ och sätter in det i f :

$$h(t) = f(\cos t, \sin t) = 3\cos t - \sin t$$
$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Uppgiften blir nu att hitta extrempunkter till h på intervallet $[0, 2\pi]$. I det inre av intervallet har vi

$$h'(t) = -3\sin t - \cos t,$$

så $h'(t) = 0 \Rightarrow \tan t = -\frac{1}{3}.$

$$\Rightarrow t = \pi - \arctan \frac{1}{3} \text{ eller} \\ t = 2\pi - \arctan \frac{1}{3}$$

Dvs i punkterna

$$\left(\cos \left(\pi - \arctan \frac{1}{3} \right), \sin \left(\pi - \arctan \frac{1}{3} \right) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2}}, \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2}} \right) \\ = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\left(\cos \left(2\pi - \arctan \frac{1}{3} \right), \sin \left(2\pi - \arctan \frac{1}{3} \right) \right) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

och värdena där blir

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{9}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{10}{\sqrt{10}}, \quad f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{10}{\sqrt{10}}.$$

Vi måste också kolla ändpunkterna

$$\begin{aligned} f(\cos 0, \sin 0) &= f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = \\ &= f(1, 0) = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Så } \max = \frac{10}{\sqrt{10}} \quad \text{och} \quad \min = -\frac{10}{\sqrt{10}}$$

$$\left(\frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{10}} > \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}} = 3 \right)$$

Lösning 2 (Lagranges metod)

Från bilden är det klart att max och min antas där nivåkurvan tangenter cirkeln. Med andra ord bör vi hitta max och min i de punkter där cirkelns normal är parallell med nivåkurvens normal.

$$\begin{aligned}\text{Eftersom } \text{grad}(x^2+y^2-1) &= (2x, 2y) \\ \text{grad } f(x,y) &= (3, -1)\end{aligned}$$

vi vill alltså ha

$$(x, y) \parallel (3, -1)$$

$$\text{dvs } (x, y) = \lambda (3, -1).$$

samtidigt ska ju punkten ligga
på kurvan dvs $(3\lambda)^2 + (-\lambda)^2 = 1$

$$\Rightarrow 10\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Vi får punkterna

$$(3\lambda, -\lambda) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \text{ eller } \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Allmän teori.

Vi söker extrempunkter till en funktion $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Antag att (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt. Lagranges metod bygger då på att om $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, så $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, så kan vi lösa ut y som funktion av x : $y = h(x)$ nära (x_0, y_0) .

Det ger att x_0 är en lokal
extrempunkt till

$$\varphi(x) = f(x, h(x))$$

$$\text{dvs } 0 = \varphi'(x_0) = \text{grad} f(x_0, h(x_0)) \cdot (1, h'(x_0))$$

samtidigt $g(x, h(x)) = 0$ så

$$0 = \text{grad} g(x_0, h(x_0)) \cdot (1, h'(x_0))$$

Vi ser att $\text{grad} g(x_0, h(x_0))$ och $\text{grad} f(x_0, h(x_0))$
är ortogonala mot samma vektor så de
är parallella.

Övn 8.12: Vilka mått har den till
volymen största cirkulära
cylinder vars totala begränsnings-
area är $6\pi \text{ dm}^2$?

Lösning:  $V(h,r) = h\pi r^2$
 $A(h,r) = 2\pi r^2 + h \cdot 2\pi r = 6\pi$
 $g(h,r) = 2\pi r^2 + h2\pi r - 6\pi$
Vi vill maximera V med bivillkoret
 $g(h,r) = 0$.

$$\text{Metod 1: } 2\pi r^2 + h 2\pi r = 6\pi$$

$$\Rightarrow h = \frac{6\pi - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{3}{r} - r \quad (r \neq 0)$$

Insättnings : $\forall$ ser

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= V\left(\frac{3}{r} - r, r\right) = \left(\frac{3}{r} - r\right)\pi r^2 = \\ &= 3\pi r - \pi r^3\end{aligned}$$

$$\varphi'(r) = 0 \Leftrightarrow 3\pi - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$$

$$\Rightarrow V(3-1, 1) = V(2, 1) = 2\pi$$

$$V(h, 0) = 0$$

SVAR: höjd = 2 dm, radie = 1 dm

metod 2: $\text{grad } g(h,r) = (2\pi r, 4\pi r + 2\pi h)$
 (Lagranges) $\neq (0,0)$ om $r \neq 0$

$$\text{grad } V(h,r) = (\pi r^2, 2\pi hr)$$

så $\text{grad } V(h,r) = \lambda \text{ grad } g(h,r)$

$$\Rightarrow (\pi r^2, 2\pi hr) = \lambda (2\pi r, 4\pi r + 2\pi h)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi r^2 = \lambda 2\pi r \\ 2\pi hr = \lambda (4\pi r + 2\pi h) \\ 2\pi r^2 + h 2\pi r = 6\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2\lambda \\ hr = \lambda(2r+h) \\ r^2 + hr = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda h = 4\lambda^2 + \lambda h \\ 4\lambda^2 + 2h\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3h\lambda = 3 \Rightarrow h = \frac{1}{\lambda} \\ 4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Flera bivillkor

Ex 8.17: Bestäm det största och minsta värdet som funktionen $f(x, y, z) = xyz$ antar då $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $x + y + z = 1$.

Lösning: Sätt $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ och $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1$ och

$$F(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$$

$$F: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{grad } g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0) \\ \text{om } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

$$\text{grad } g_2(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$$

Så vi kan exempelvis lösa ut y, z som funktioner av x .

$$\varphi(x) = f(x, y(x), z(x))$$

$$0 = \varphi'(x_0) = \text{grad } f(x_0, y(x_0), z(x_0)) \cdot (1, y'(x_0), z'(x_0))$$

samtidigt har vi

$$\text{grad } g_1(x_0, y(x_0), z(x_0)) \cdot (1, y'(x_0), z'(x_0)) = 0$$

$$\text{och } \text{grad } g_2(x_0, y(x_0), z(x_0)) \cdot (1, y'(x_0), z'(x_0)) = 0$$

vektorerna är där för komplex
 dvs

$$\text{grad } f(x_0, y(x_0), z(x_0)) = \lambda \text{grad } g_1(x_0, y(x_0), z(x_0)) + \mu \text{grad } g_2(x_0, y(x_0), z(x_0))$$
 så vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} yz = \lambda(2x + \mu) \\ xz = \lambda(2y + \mu) \\ xy = \lambda(2z + \mu) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{två variabler lika}$$

$(y-x)z = 2\lambda(x-y)$

$x=y: \quad z = 2 - 2x \quad \text{så } (4) \text{ ser } (2-2x)^2 + 2x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \left\{ \frac{1}{3} \right\} \quad \text{dvs punkterna } (1, 1, 0) \text{ eller } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$

Pss får vi om $x=z$ punkterna
 $(1,0,1), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$
och om $y=z$ $(0,1,1), (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$$f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(0,1,1) = 0$$
$$f(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{4}{27}$$

SVAR: $\max = \frac{4}{27}, \min = 0$.