

Allmänna egenskaper

Varje system kan med hjälp av Gauss-Jordans metod föras över till ett på trappstegs form. Vi får därför följande sats.

Sats 1: Antalet lösningar
till ett linjärt system
är antingen

- precis en lösning

När trappstegen i trappstegs-
matrisen alla har längd
ett.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- oändligt många lösningar

tex $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right)$

Om det finns trappsteg av
längd större än 1, eller
att det finns en nollkolonn.
Det får inte finnas någon nollrad
i vänsterledet som svarar mot något
 $\neq 0$ i högerledet.

~~$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$~~

- inga alls

Om det finns en rad med
bara nollor i VL som svarar
mot något $\neq 0$ i högerledet

tex $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$

homogena system

ett system där alla
koefficienter i HL är noll
kallas homogent.

$$\text{Ex : Lös } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Lös: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{5} \quad \boxed{-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \end{array}$$

Föreläsning 3, sid 6

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-1} \quad \boxed{-3} \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{1}{3}t \\ X_2 = -\frac{2}{3}t \\ X_3 = t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ (t=0 \text{ ger} \\ X_1 = X_2 = X_3 = 0) \end{array}$$

Vi observerar att O_{p1-3} tar homogena system till homogena system. Ett homogent system är därför ekvivalent med ett homogent system på trappstegsform. Homogena system har därför alltid minst en lösning; den triviala

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0.$$

Typer av system

- liggande system

$$\text{t.ex } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

antalet variabler är fler
än antalet ekvationer

• stängde system $\square$

$$\text{lex} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Antalet ekvationer överstiger
antalet variabler.

- Kvadratiske system 

tex
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Antalet variabler är lika
med antalet ekvationer

För ett liggande system
på trappstegsform gäller
att något trappsteg har
längd större än ett för
antalet variabler är större
än antalet ekvationer.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

Det ger

Sats: Ett liggande system
har antingen oändligt
många lösningar $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}\right)$
eller inga alls $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}\right)$

För stäende system på
trappstegsform gäller att
några rader i VL måste vara
nollrader för antalet ekvationer
är fler än antalet variabler.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

inga lösningar

Vi får där för att

Sets: Stående system saknar
lösningar för allmänna högerled.

tex $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ har lösningen $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

men $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{array}\right)$ saknar lösning om
 $a \neq 0$.

Vi kan nu dra slutsatsen
att

Sats: System som har precis
en lösning för allmänna högerled
måtte vara kvadratisk.

I ett kvadratisk system på
trappstegsform har antingen alla
trappstegs längd ett eller

så finns en noll rad.

tex $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$

Om det finns en lösning i det
senare fallet ^{dvs då vi har nollrader} måste det
finnas oändligt många lösningar.
(systemet blir ^{då} ekvivalent med ett)
liggande system

Det betyder att

Sats: Om ett kvadratisk system som har precis en lösning för något högerled, så har det precis en lösning för godtyckliga högerled.

"bevis": Ett kvadratisk system på trappstegsform är diagonalt

Om alla trappsteg har
längd ett eller så
finns ^{minst} en nollrad. Men
i det senare fallet finns
oändligt många lösningar
om det finns någon lösning,
så om vi får något högerled
har precis en lösning måste
alla trappsteg ha längd ett.

$$\begin{array}{lcl} \text{tex} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \text{ger} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \text{ger} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right) & \text{ger} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 6 \end{cases} \end{array}$$

Simultana system

Ex: Lösa systemen

$$\text{I} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \quad , \quad \text{II} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Observera att det är samma

VL i bägge fallen.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 2 & & \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -2 & & \end{array} \right)$$

Föreläsning 3, sid 21

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right) \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-2} \quad \boxed{1} \\ \sigma \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{array} \right) \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sigma \\ \boxed{-\frac{2}{3}} \quad \boxed{\frac{1}{3}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

SVAR: I: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ II: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Ex: Lös systemen

$$\text{I} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Föreläsning 3, sid 23

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-3} \\ \updownarrow \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \boxed{\frac{1}{7}} \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \boxed{3} \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \updownarrow \end{array}
 \end{aligned}$$

+

$$\text{I} \begin{cases} X_1 = \frac{9}{7} + \frac{t}{7} \\ X_2 = -\frac{4}{7} + \frac{5}{7}t \\ X_3 = t \end{cases}$$

$$\text{II:} \begin{cases} X_1 = \frac{2}{7} + \frac{s}{7} \\ X_2 = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}s \\ X_3 = s \end{cases}$$