

Bivillkor i form av olikheter

Ex: Bestäm största och minsta
värdet för funktionen

$f(x, y) = \sin(xy)$
i enhetscirkelskivan: $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: Vi tittar först i det inre av
området. Eftersom funktionen
är kontinuerligt deriverbar gäller
för en lokal extrempunkt (x_0, y_0) att

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

V_i har

$$\text{grad } f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$$

så $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ eller } xy = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

men $-1 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq y \leq 1$ så

$$-1 \leq xy \leq 1 \text{ men } \frac{\pi}{2} > 1 \text{ och } -\frac{\pi}{2} < -1$$

så enda kritiska punkten är $(0, 0)$.

Andra derivatorna blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -y^2 \sin(xy) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -x^2 \sin(xy) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \cos(xy) - xy \sin(xy) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1$$

$$\text{Hesse} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -1 \text{ så} \\ \text{sadelpunkt} \\ \text{ingen extrempunkt.}$$

Vi måste nu även undersöka
randen $= \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$

metod 1: randen kan parametriseras
 $[0, 2\pi]$ som $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ och vi får

$$h(t) = f(\cos t, \sin t) = \sin(\cos t \sin t)$$

$$\text{så } h'(t) = \cos(\cos t \sin t) \cdot (-\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$\text{dvs } h'(t) = 0 \quad \cos^2 t = \sin^2 t \quad \text{dvs}$$

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

vilket ger punkterna

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

och värdena

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Så visar att $\max = \sin \frac{1}{2}$ och

$$\min = -\sin \frac{1}{2}.$$

$$\text{metod 2: } \text{grad}(\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{g(x,y)}) = (2x, 2y)$$
$$\text{grad } f(x,y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$$

Vi har $\text{grad } f(x,y) = \lambda \text{grad } g(x,y)$
för en lokal extrempunkt.

$$\text{Så } \begin{cases} y \cos(xy) = 2\lambda x \\ x \cos(xy) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} & \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \\ & \Rightarrow x^2 = y^2 \\ & \textcircled{3} \quad 2x^2 = 1 \\ & \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ & g(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Vilket ger punkterna

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Som förut.

Ex: Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x,y) = \sin x \cos y$$

i första kvadranten $= \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$

Lös: För det inre av området

$\{(x,y); x > 0, y > 0\}$ har vi

$$\text{grad } f(x,y) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y)$$

$$\text{så } \text{grad } f(x,y) = (0,0) \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, y = m\pi \quad n \geq 0$$

$$\text{eller } x = n\pi, y = \frac{\pi}{2} + m\pi. \quad m \geq 0$$

Hesse matrisen blir

$$H = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det H = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y$$

$$\text{så } \det H\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, m\pi\right) = 1 - 0 \cdot 0 = 1 \quad \text{max eller min}$$

$$\det H\left(m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right) = -1 \quad \text{sadelpunkt}$$

Är punkten $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, m\pi\right)$ max eller min punkt? Vi har ett

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos(m\pi) = -(-1)^n (-1)^m$$

så om $n \equiv m \pmod{2}$ max

$n \not\equiv m \pmod{2}$ min

$$f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, m\pi\right) = (-1)^n (-1)^m.$$

Randen består av två halvlinjer
 $\{(0, y); y \geq 0\}$ och $\{(x, 0); x \geq 0\}$

$$(0, y): f(0, y) = 0$$

$$(x, 0): g(x) = f(x, 0) = \sin x, \quad x \geq 0$$

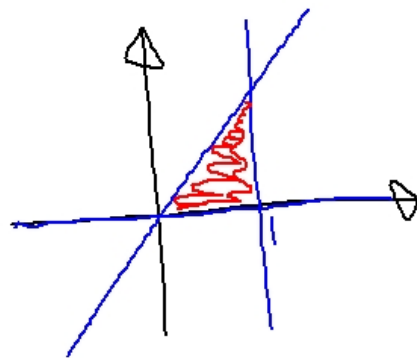
$$g'(x) = \cos x \quad \text{så} \quad g'(x) = 0 \quad \text{om}$$

$$\text{och vi får då} \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right) = (-1)^n$$

SVAR: största värde = 1, minsta värde = -1.

Ex: Bestäm största och
minsta värde som antas
av funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
i området begränsat av linjerna
 $y=0$, $x=1$, $y=x$.



I det inre av området

$$\{(x,y); y > 0, x < 1, y - x < 0\}$$

gäller det för en extrempunkt
att

$$\text{grad } f(x,y) = (0,0)$$

Vi har

$$\text{grad } f(x,y) = (2x+y, x+2y)$$

$$\text{så } \text{grad } f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{y}{2}, 2y - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ och } x = 0$$

men $(0,0)$ ligger ej i det inre av området.

Funktionen saknar alltså kritiska punkter i det inre av området.

Det återstår att studera randen

$$\text{I} \{ (x, 0); 0 \leq x \leq 1 \} \cup \{ (1, y); 0 \leq y \leq 1 \} \cup \\ \cup \{ (x, x); \text{III} \quad 0 \leq x \leq 1 \}.$$

$$\text{I: } g_1(x) = f(x, 0) = x^2$$

$$g_1'(x) = 2x \neq 0 \quad \text{när } 0 < x < 1.$$

$$\text{II: } g_2(y) = f(1, y) = 1 + y + y^2. \quad g_2'(y) = 1 + 2y \neq 0 \quad 0 < y < 1$$

$$\text{III: } g_3(x) = f(x, y) = 3x^2$$

$$g_3'(x) = 6x \neq 0 \text{ då } 0 < x < 1.$$

$$\text{Härnen: } f(0,0) = 0 \quad \min$$

$$f(1,0) = 1$$

$$f(1,1) = 3 \quad \max$$

Övn: $\frac{x+y}{x-y}$ se Taylor utvecklingen
till ordning 3 i punkten $(1,0)$.

Lös: $x=1+h, y=k$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+h+k}{1-(k-h)} = (1+h+k) \frac{1}{1-(k-h)}$$

Minns

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + O(t^4)$$

$$\text{så } \frac{1}{1-(k-h)} = 1 + (k-h) + (k-h)^2 + (k-h)^3 + O(|(h,k)|^4)$$

$$\begin{aligned}
 & (1+h+k) \left(1 + (k-h) + (k-h)^2 + (k-h)^3 + O(|(h,k)|^4) \right) \\
 &= 1 + k - h + k^2 - 2kh + \cancel{h^2} + k^3 - 3k^2h + 3kh^2 - \cancel{h^3} \\
 &+ hk - \cancel{h^2} + hk^2 - 2h^2k + \cancel{h^3} + k^3 - 2hk^2 + h^2k + \\
 &+ O(|(h,k)|^4) = \\
 &= 1 + k - h + k^2 - hk + 2k^3 - 4hk^2 + 2h^2k + O(4) \\
 &\text{sätt t. i. l. b. k. s. } x, y: \\
 &= 1 - (x-1) + y + y^2 - (x-1)y + 2y^3 - 4(x-1)y^2 + 2(x-1)^2y \\
 &\quad + O(|(x-1, y)|^4)
 \end{aligned}$$